

# Rotaciones, secuencia aeroespacial y cuaterniones. Una revisión de las relaciones fundamentales

Eduardo Serrano<sup>1</sup>, Ricardo Oscar Sirne<sup>2</sup> y Guillermo La Mura<sup>3</sup>

## Resumen

En este trabajo se presenta un esquema que justifica e interpreta geoméricamente las formulas fundamentales que permiten relacionar los ángulos de Euler, con la matriz de rotación y el cuaternión para describir la rotación de un cuerpo en el espacio tridimensional (3D).

Esta revisión de fórmulas logra un nivel de simplicidad y detalle que posibilita una eficiente implementación computacional a nivel de software o de hardware programable.

La fundamentación se realiza adoptando los denominados ángulos de Euler para la secuencia aeroespacial. Con similar razonamiento se la puede desarrollar para otras secuencias de interés.

Las expresiones son de aplicación en sistemas de posicionamiento y control automático que utilizan mediciones continuas desde dispositivos tales como giróscopos, acelerómetros y magnetómetros 3D.

**Palabras clave:** Ángulos de Euler, secuencia aeroespacial, cuaternión.

---

1 UNSAM, Escuela Superior Técnica - IUE

2 UBA - Facultad de Ingeniería

3 ECyT UNSAM

## **Abstract**

In this paper we propose a methodology for prove and make a geometric interpretation of the main formulas to relate the Euler's angles with the rotation matrix and the corresponding quaternion, to describe the rotation movement of a body in space of three dimensions (3D).

This review of the formulas includes the simplicity and detail levels to allow efficient computational design to implementation via software or programmable hardware.

Development is done by adopting the so-called Euler angles for the aerospace sequence. With similar reasoning it can be prove the corresponding relationships to other sequences of interest.

The expressions are applicable to positioning systems and automatic control which use continuous measurements from devices such as gyroscopes, accelerometers and magnetometers 3D.

***Key words:*** Euler's angles, aerospace sequence, quaternion.

## I. Introducción

La estimación de la posición de un objeto rígido que se mueve en el espacio tridimensional constituye un problema frecuente y de fundamental importancia de la ingeniería y la tecnología en general. Por ejemplo aeronaves, vehículos terrestres, antenas y sistemas de posicionamiento incluyendo brazos de robot.

Esta estimación en general se hace a partir de datos medidos por distintos dispositivos que permiten sensar la posición y el movimiento del cuerpo (Systron, 2011).

Dichos datos, obtenidos desde giróscopos, acelerómetros y magnetómetros 3D (Kemp et al., 1998; Madgwick, 2010) se deben traducir en una precisa descripción de la rotación espacial del cuerpo durante su desplazamiento (Sabatini, 2005; Waldron & Schmiedeler, 2008).

Esta descripción normalmente se realiza mediante la información temporal expresada en términos de los ángulos de Euler, mediante cuaterniones o matrices de rotación (Chou, 1992; Eberly, 2010; Marins et al., 2009; Kirtley, 2001).

Si bien las fórmulas que relacionan estos elementos son clásicas, su justificación e interpretación geométrica no es evidente lo cual dificulta su implementación.

Particularmente se dificulta el diseño de algoritmos para la implementación computacional, combinándola con técnicas matemáticas de filtrado y procesamiento de los datos en tiempo real (Marins et al., 2009; Sabatini, 2006).

Esto motiva el presente trabajo que apunta a sintetizar, justificar e interpretar geoméricamente las relaciones entre los ángulos de Euler, la matriz de rotación y el cuaternión asociado a cada rotación.

Los presentes desarrollos se basan en la bibliografía existente, parte de la cual se detalla en las referencias.

El trabajo está organizado comenzando, en la siguiente sección, por analizar la rotación relativa de un vector alrededor de otro y justificando la denominada fórmula de Rodrigues.

En la próxima sección se definen los cuaterniones en forma matricial y se detallan varias propiedades aritméticas de interés.

A continuación se establecen las relaciones entre cuaterniones y rotaciones, para culminar en la quinta sección justificando las relaciones entre los ángulos de Euler, la matriz de rotación y el cuaternión de cada rotación.

## II. Rotación de un vector – fórmula de Rodrigues

Se plantea en  $\mathfrak{R}^3$  el giro de un vector  $\vec{u} \neq \vec{0}$  alrededor de un versor  $\vec{v}$ , en un ángulo  $\theta$  y en sentido positivo.

En la Fig. 1a se representan los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  que generan un plano sombreado  $\pi_0$  que contiene al punto  $\vec{a}$  y tiene a  $\vec{c}_2$  como versor normal; se supone que el producto vectorial  $\vec{v} \wedge \vec{u} \neq \vec{0}$ , siendo  $\varphi \in (0, \pi)$  el ángulo entre  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

El espacio de referencia es  $x_1, x_2, x_3$  con origen  $(0,0,0)$  y versores canónicos:

$$\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0) \text{ y } \vec{e}_3 = (0,0,1)$$

Considérese ahora otro sistema con origen en  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  y versores canónicos:

$$\vec{c}_1, \vec{c}_2 \text{ y } \vec{c}_3 \equiv \vec{v}$$

Dado el orden cíclico del producto vectorial:

$$\vec{c}_1 \wedge \vec{c}_2 = \vec{v}, \vec{c}_2 \wedge \vec{v} = \vec{c}_1 \text{ y } \vec{v} \wedge \vec{c}_1 = \vec{c}_2 \tag{1}$$

Estando  $\vec{u}$  en el plano generado por  $\vec{c}_1$  y  $\vec{v}$ , se lo puede expresar como:

$$\vec{u} = \underbrace{\text{sen}(\varphi) |\vec{u}| \vec{c}_1}_{\vec{u}_1} + \underbrace{\text{cos}(\varphi) |\vec{u}| \vec{v}}_{\vec{u}_3} \tag{2}$$

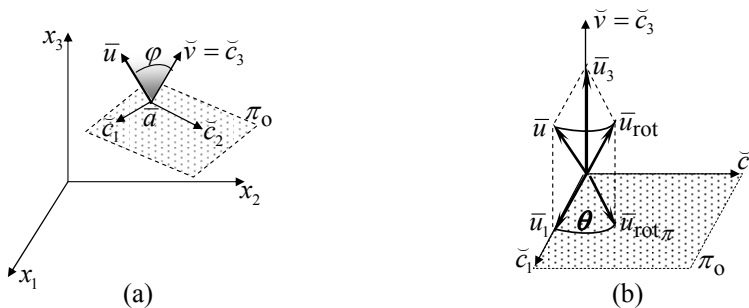
Por otra parte, siendo  $\vec{v} \wedge \vec{u} = |\vec{u}| \text{sen}(\varphi) \vec{c}_2$ , se tiene que:

$$(\vec{v} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = |\vec{u}| \text{sen}(\varphi) \vec{c}_2 \wedge \vec{v} = |\vec{u}| \text{sen}(\varphi) \vec{c}_1 = \vec{u}_1 \tag{3}$$

Así, reemplazando (3) en (2) y teniendo en cuenta que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \text{cos}(\varphi)$ , resulta:

$$\vec{u} = \underbrace{(\vec{v} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v}}_{\vec{u}_1} + \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v} \vec{v}}_{\vec{u}_3} \tag{4}$$

Para facilitar la interpretación geométrica, en la Fig. 1b se muestra una representación local alrededor de  $\vec{a}$ .



**Fig. 1** (a) posición relativa de las ternas, (b) representación local alrededor de  $\vec{a}$ .

El vector que se busca es  $\vec{u}_{rot}$ , que surge de rotar  $\vec{u}$  alrededor de  $\vec{v}$  un ángulo  $\theta$  en sentido positivo; como puede observarse:

$$\vec{u}_{rot} = \vec{u}_{rot_\pi} + \vec{u}_3 \tag{5}$$

siendo  $|\vec{u}_{rot_\pi}| = |\vec{u}_1|$ .

La componente  $\bar{u}_3$  no cambia pues el giro es alrededor de  $\check{v}$ , entonces:

$$\bar{u}_{\text{rot}\pi} = \cos(\theta) \underbrace{|\bar{u}_1| \check{c}_1}_{\bar{u}_1} + \sin(\theta) \underbrace{|\bar{u}_1| \check{c}_2}_{\check{v} \wedge \bar{u}_1} \quad (6)$$

ya que, por (1),  $|\check{u}_1| \check{c}_2 = |\check{u}_1| \check{v} \wedge \check{c}_1 = \check{v} \wedge \bar{u}_1$ .

Reemplazando (6) en (5) resulta:

$$\bar{u}_{\text{rot}} = \cos(\theta) \bar{u}_1 + \sin(\theta) \check{v} \wedge \bar{u}_1 + \bar{u}_3$$

con lo cual, expresando  $\bar{u}_1, \bar{u}_3$  según (4) queda:

$$\bar{u}_{\text{rot}} = \cos(\theta) (\check{v} \wedge \bar{u}) \wedge \check{v} + \sin(\theta) \check{v} \wedge [(\check{v} \wedge \bar{u}) \wedge \check{v}] + \bar{u} \cdot \check{v} \check{v} \quad (7)$$

Por último, como  $(\check{v} \wedge \bar{u}) \wedge \check{v} = \check{v} \cdot \check{v} \bar{u} - \bar{u} \cdot \check{v} \check{v} = \bar{u} - \bar{u} \cdot \check{v} \check{v}$ , de (7) se obtiene:

$$\bar{u}_{\text{rot}} = \cos(\theta) [\bar{u} - \bar{u} \cdot \check{v} \check{v}] + \sin(\theta) \check{v} \wedge [\bar{u} - \bar{u} \cdot \check{v} \check{v}] + \bar{u} \cdot \check{v} \check{v} \quad (8)$$

y ya que  $\check{v} \wedge [\bar{u} - \bar{u} \cdot \check{v} \check{v}] = \check{v} \wedge \bar{u} - \bar{u} \cdot \check{v} \check{v} \wedge \check{v} = \check{v} \wedge \bar{u}$ , pues  $\check{v} \wedge \check{v} = \bar{0}$ , resulta:

$$\bar{u}_{\text{rot}} = \cos(\theta) \bar{u} + \sin(\theta) \check{v} \wedge \bar{u} + [1 - \cos(\theta)] \bar{u} \cdot \check{v} \check{v} \quad (9)$$

que es la denominada fórmula de Rodrigues (Olinde Rodrigues, 1795-1851, matemático francés).

Interesa representar esta última expresión en forma matricial, para ello puede observarse que siendo  $\check{v} = (v_1, v_2, v_3)$  y  $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ , su producto vectorial  $\check{v} \wedge \bar{u}$ , resulta:

$$\check{v} \wedge \bar{u} = (v_2 u_3 - v_3 u_2, v_3 u_1 - v_1 u_3, v_1 u_2 - v_2 u_1)$$

Si se denota  $(\check{\bullet})$  la matriz correspondiente al vector  $\check{\bullet}$ , queda:

$$(\check{v} \wedge \bar{u}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}}_{(w)} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}_{(\bar{u})} \quad (10)$$

Por otra parte, dado que:

$$(\check{v})(\check{v})^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} (v_1 \quad v_2 \quad v_3) = \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_1 v_2 & v_2^2 & v_2 v_3 \\ v_1 v_3 & v_2 v_3 & v_3^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

resulta:

$$(\bar{u} \cdot \check{v} \check{v}) = \begin{pmatrix} u_1 v_1^2 + u_2 v_1 v_2 + u_3 v_1 v_3 \\ u_1 v_1 v_2 + u_2 v_2^2 + u_3 v_2 v_3 \\ u_1 v_1 v_3 + u_2 v_2 v_3 + u_3 v_3^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{(\check{v})} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}}_{(\check{v})^T} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}_{(\bar{u})} \quad (12)$$

Con (10) y (12), siendo  $I \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$  la matriz identidad, la fórmula (9) puede expresarse:

$$(\bar{u}_{\text{rot}}) = \cos(\theta) I(\bar{u}) + \sin(\theta) (w)(\bar{u}) + [1 - \cos(\theta)] (\check{v})(\check{v})^T(\bar{u})$$

resultando:

$$(\bar{u}_{rot}) = \underbrace{[\cos(\theta) I + \text{sen}(\theta) (\vec{w}) + [1 - \cos(\theta)] (\vec{v})(\vec{v})^T]}_{R_\theta} (\bar{u}) = R_\theta (\bar{u}) \quad (13)$$

que es la fórmula de Rodrigues en forma matricial, donde  $R_\theta$  es la matriz de rotación.

Por último, desarrollando la expresión de  $R_\theta$  se obtiene:

$$R_\theta = \cos(\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \text{sen}(\theta) \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} + [1 - \cos(\theta)] \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_1 v_2 & v_2^2 & v_2 v_3 \\ v_1 v_3 & v_2 v_3 & v_3^2 \end{pmatrix}$$

es decir:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} [1 - \cos(\theta)]v_1^2 + \cos(\theta) & [1 - \cos(\theta)]v_1 v_2 - \text{sen}(\theta)v_3 & [1 - \cos(\theta)]v_1 v_3 + \text{sen}(\theta)v_2 \\ [1 - \cos(\theta)]v_1 v_2 + \text{sen}(\theta)v_3 & [1 - \cos(\theta)]v_2^2 + \cos(\theta) & [1 - \cos(\theta)]v_2 v_3 - \text{sen}(\theta)v_1 \\ [1 - \cos(\theta)]v_1 v_3 - \text{sen}(\theta)v_2 & [1 - \cos(\theta)]v_2 v_3 + \text{sen}(\theta)v_1 & [1 - \cos(\theta)]v_3^2 + \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (14)$$

donde  $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$  pues  $\vec{v}$  es un versor. La traza de  $R_\theta$  es  $\text{tr}(R_\theta) = 1 + 2\cos(\theta)$ .

### III. Cuaterniones

Definido en forma matricial, un cuaternión  $q$  se representa mediante:

$$q = \begin{pmatrix} a & -b & d & -c \\ b & a & -c & -d \\ -d & c & a & -b \\ c & d & b & a \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_I + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_i + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_j + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_k \quad (15)$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , los elementos  $I, i, j$  y  $k$  también son cuaterniones y forman la base  $BQ$  del espacio de cuaterniones, siendo  $q$  combinación lineal de los elementos de  $BQ$ .

En forma equivalente se puede denotar:

$$q = aI + bi + cj + dk = (a, b, c, d) \quad (16)$$

Se definen:

$$\text{Conjugado de } q: q^* = (a, -b, -c, -d) = 2aI - q \quad (17)$$

$$\text{Norma de } q: |q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \quad (18)$$

Es claro que  $(q^*)^* = q$ ; por otra parte, matricialmente:  $q^* \equiv q^T$  y  $|q| = \sqrt[4]{\det(q)}$ .

Siendo  $I = (1,0,0,0)$ ,  $i = (0,1,0,0)$ ,  $j = (0,0,1,0)$ ,  $k = (0,0,0,1)$ :  $|I| = |i| = |j| = |k| = 1$ .

Por simple cálculo matricial se pueden verificar las siguientes propiedades:

P1) Propiedad cíclica del producto entre  $i, j, k$ :  $ij = k$ ,  $jk = i$ ,  $ki = j$ .

Cumpléndose también que  $ji = -k$ ,  $kj = -i$ ,  $ik = -j$ .

P2)  $i^2 = j^2 = k^2 = -I$ , además:  $ijk = -I$  pues  $\begin{cases} ijk = i(jk) = i^2 \\ ijk = (ij)k = k^2 \end{cases}$ .

P3) Si  $q = (a, b, c, d)$  y  $q' = (a', b', c', d')$  son cuaterniones:

La suma es asociativa y conmutativa:  $q + q' = (a + a', b + b', c + c', d + d') = q' + q$ .

El producto es asociativo pero no conmutativo, puede obtenerse por producto matricial, siendo:  $qq' = (a, b, c, d)(a', b', c', d') = (a'', b'', c'', d'')$ , con  $a'' = aa' - bb' - cc' - dd'$ ,  $b'' = a'b + ab' + cd' - dc'$ ,  $c'' = ca' + ac' - bd' + b'd$  y  $d'' = da' + ad' + bc' - b'c$ .

En particular, siendo  $q^*$  el conjugado de  $q$ ,  $qq^* = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2, 0, 0, 0) = |q|^2 I$ ; de donde, la norma de  $q$  puede expresarse como  $|q| = \sqrt{|qq^*|}$ . Observándose también que:  $II^* = ii^* = jj^* = kk^* = I$ .

El producto de un cuaternión por un escalar  $k$  es:  $kq = k(a, b, c, d) = (ka, kb, kc, kd)$ , de donde:  $|kq| = |k| |q|$ ; aquí  $|k|$  es el valor absoluto de  $k \in \mathfrak{R}$ .

P4) Si  $q = (a, b, c, d)$  y  $q' = (a', b', c', d')$  son cuaterniones:  $(qq')^* = q'^* q^*$ , mientras que  $|pq| = |p| |q|$ .

P5) Siendo el cuaternión  $q \neq (0,0,0,0)$ , el cuaternión  $q^{-1}$  tal que  $qq^{-1} = I$  es el inverso multiplicativo de  $q$ ; en forma matricial es la matriz inversa de  $q$ . Se verifica que:

$$q^{-1} \doteq \frac{q^*}{|q|^2} \tag{19}$$

pues  $qq^{-1} = qq^*/|q|^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2, 0, 0, 0)/(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (1,0,0,0) = I$ .

En particular:  $(qq')^{-1} = q'^{-1} q^{-1}$ , donde  $q^{-1}$  y  $q'^{-1}$  son los inversos multiplicativos de los cuaterniones  $q$  y  $q'$  respectivamente.

También se cumple que:  $(q^{-1})^{-1} = q$  y  $|q^{-1}| = 1/|q|$ .

P6) Todo cuaternión  $q = (a, b, c, d)$  con  $|q| \neq 0$  tiene asociado un cuaternión unitario  $\tilde{q}$ , tal que su norma  $|\tilde{q}| = 1$ . La expresión correspondiente es:

$$\tilde{q} \doteq \frac{q}{|q|} \tag{20}$$

que por lo visto en “P3)” tiene  $|\tilde{q}| = 1$ .

Los elementos de  $BQ = \{I, i, j, k\}$  son cuaterniones unitarios.

En particular, aplicando (19), el inverso multiplicativo de un cuaternión unitario  $\tilde{q}$  es:

$$\tilde{q}^{-1} = \tilde{q}^* / |\tilde{q}|^2 = \tilde{q}^* \equiv \tilde{q}^T \tag{21}$$

pues  $|\tilde{q}| = 1$ .

P7) Un cuaternión  $q$  admite las siguientes representaciones:

$$q = \underbrace{(a, b, c, d)}_{\text{punto} \in \mathfrak{R}^4} = \underbrace{aI + bi + cj + dk}_{\text{formato matricial}} = a + \underbrace{\tilde{v}}_{(b, c, d) \in \mathfrak{R}^3} \tag{22}$$

Utilizando el último formato, el producto de  $q_1 = a_1 + \tilde{v}_1$  por  $q_2 = a_2 + \tilde{v}_2$  se puede calcular usando la fórmula (Eberly, 2010; Rodríguez Padilla, tesis digital):

$$q_1 q_2 = \underbrace{a_1 a_2}_{a} - \underbrace{\tilde{v}_1 \cdot \tilde{v}_2}_{\tilde{v}} + \underbrace{a_2 \tilde{v}_1 + a_1 \tilde{v}_2 + \tilde{v}_1 \wedge \tilde{v}_2}_{\tilde{v}} \tag{23}$$

donde “ $\cdot$ ” representa producto escalar y “ $\wedge$ ” producto vectorial entre  $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in \mathfrak{R}^3$ ; trabajando en forma matricial la verificación de (23) es inmediata.

P8) Dado el versor  $\tilde{v} = (v_1, v_2, v_3)$  y el ángulo  $\lambda$ , el cuaternión:

$$\tilde{q} = \cos(\lambda) + \text{sen}(\lambda)\tilde{v} = (\cos(\lambda), \text{sen}(\lambda)v_1, \text{sen}(\lambda)v_2, \text{sen}(\lambda)v_3) \tag{24}$$

es unitario pues  $|\tilde{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$  y  $|\tilde{q}| = \sqrt{\cos^2(\lambda) + \text{sen}^2(\lambda)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)} = 1$ .

Recíprocamente, todo cuaternión unitario  $\tilde{q}$  puede expresarse según (24). Para ello, dado el cuaternión  $q = a + \tilde{v} = (a, b, c, d) \neq (a, 0, 0, 0)$ , aplicando (20), tiene asociado el cuaternión unitario  $\tilde{q} = q / |q| = \frac{a + \tilde{v}}{|q|} = \frac{a}{|q|} + \frac{|\tilde{v}|}{|q|} \frac{\tilde{v}}{|\tilde{v}|} = \frac{a}{|q|} + \frac{|\tilde{v}|}{|q|} \tilde{v}$ , donde definiendo el

ángulo  $\lambda \in (0, \pi)$  tal que: 
$$\begin{cases} \cos(\lambda) = \frac{a}{|q|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} \\ \text{sen}(\lambda) = \frac{|\tilde{v}|}{|q|} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} \end{cases}$$
 se obtiene la forma (24).

Cuando  $q = a + \bar{0} = (a, 0, 0, 0)$  con  $a \neq 0$ ,  $\tilde{q} = a / |a| + \bar{0} = \cos(k\pi) + \text{sen}(k\pi)\bar{0}$  donde corresponden:  $k = 0$  y  $\lambda = 0$  si  $a > 0$ ,  $k = 1$  y  $\lambda = \pi$  si  $a < 0$ .

P9) Partiendo de (24) donde  $\tilde{v} \in \mathfrak{R}^3$  es un versor, un cuaternión unitario también puede expresarse mediante (Eberly, 2010):

$$\tilde{q} = \cos(\lambda) + \text{sen}(\lambda)\tilde{v} = \text{Exp}(\lambda \tilde{v}) \tag{25}$$

que es la generalización de la identidad de Euler.

Es posible definir el logaritmo natural de un cuaternión unitario como:

$$\ln(\tilde{q}) = \ln(\text{Exp}(\lambda \tilde{v})) = \lambda \tilde{v} \tag{26}$$



y también la potencia de un cuaternión unitario como:

$$\tilde{q}^n = (\cos(\lambda) + \text{sen}(\lambda)\tilde{v})^n = \text{Exp}(n\lambda\tilde{v}) = \cos(n\lambda) + \text{sen}(n\lambda)\tilde{v} \quad (27)$$

En cambio, dado que el producto de cuaterniones es no conmutativo, no es posible aplicar las identidades típicas de las funciones logaritmo y exponencial. Es decir:

$$\ln(\tilde{p}\tilde{q}) \text{ puede resultar distinto de } \ln(\tilde{p}) + \ln(\tilde{q})$$

y

$$\text{Exp}(\tilde{p} + \tilde{q}) \text{ puede resultar distinto de } \text{Exp}(\tilde{p}) \text{Exp}(\tilde{q})$$

#### IV. Relación entre cuaterniones y rotaciones

La rotación de un vector  $\vec{u} \in \mathfrak{R}^3$  alrededor de un eje orientado por  $\tilde{v}$  en un ángulo  $\theta$ , puede representarse mediante un cuaternión unitario  $\tilde{q} = \cos(\theta/2) + \text{sen}(\theta/2)\tilde{v}$ .

Considérese la mencionada fórmula (9) de Rodrigues para el vector rotado, que se repite aquí para facilitar la lectura:

$$\vec{u}_{\text{rot}} = \cos(\theta)\vec{u} + \text{sen}(\theta)\tilde{v} \wedge \vec{u} + [1 - \cos(\theta)]\vec{u} \cdot \tilde{v}\tilde{v} \quad (9)$$

y el formato (23) del producto de cuaterniones, que también se reitera:

$$q_1 q_2 = \underbrace{a_1 a_2 - \tilde{v}_1 \cdot \tilde{v}_2}_a + \underbrace{a_2 \tilde{v}_1 + a_1 \tilde{v}_2 + \tilde{v}_1 \wedge \tilde{v}_2}_{\tilde{v}} \quad (23)$$

Dado que al vector  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathfrak{R}^3$  le corresponde el cuaternión  $u = (0, u_1, u_2, u_3)$ , aplicando (23) para calcular el producto  $u\tilde{q}^*$ , donde  $\tilde{q}^* = \cos(\theta/2) - \text{sen}(\theta/2)\tilde{v}$ , resulta:

$$u\tilde{q}^* = \underbrace{\text{sen}(\theta/2)\vec{u} \cdot \tilde{v}}_a + \underbrace{\cos(\theta/2)\vec{u} - \text{sen}(\theta/2)\vec{u} \wedge \tilde{v}}_{\tilde{r}} \quad (28)$$

Si ahora se pre-multiplica esta última por  $\tilde{q}$ , usando también (23), se obtiene:

$$\begin{aligned} qu\tilde{q}^* &= \underbrace{\cos(\theta/2)\text{sen}(\theta/2)\vec{u} \cdot \tilde{v} - \cos(\theta/2)\text{sen}(\theta/2)\vec{u} \cdot \tilde{v} - \text{sen}^2(\theta/2)\tilde{v} \cdot \vec{u} \wedge \tilde{v}}_{=0} + \underbrace{\text{sen}^2(\theta/2)\vec{u} \wedge \tilde{v}}_{=0} \\ &\quad \underbrace{+ \text{sen}^2(\theta/2)\vec{u} \cdot \tilde{v}\tilde{v} + \cos(\theta/2)\tilde{r} + \text{sen}(\theta/2)\tilde{v} \wedge \tilde{r}}_{\tilde{k}} \\ &\quad \underbrace{0 \in \mathfrak{R}} \end{aligned}$$

Es decir:

$$qu\tilde{q}^* = 0 + \tilde{k} \text{ con } \tilde{k} = \text{sen}^2(\theta/2)\vec{u} \cdot \tilde{v}\tilde{v} + \cos(\theta/2)\tilde{r} + \text{sen}(\theta/2)\tilde{v} \wedge \tilde{r} \quad (29)$$

Reemplazando la expresión de  $\tilde{r}$  según (28), resulta:

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \text{sen}^2(\theta/2)\vec{u} \cdot \tilde{v}\tilde{v} + \cos^2(\theta/2)\vec{u} \cdot \tilde{v}\tilde{v} + \overbrace{\text{sen}(\theta/2)\tilde{v} \wedge \vec{u}}^{\text{sen}(\theta/2)\tilde{v} \wedge \vec{u}} \\ &\quad - \text{sen}^2(\theta/2)\tilde{v} \wedge (\vec{u} \wedge \tilde{v}) \end{aligned}$$

es decir,  $\tilde{k} = \text{sen}^2(\theta/2)\vec{u} \cdot \tilde{v}\tilde{v} + \cos^2(\theta/2)\vec{u} \cdot \tilde{v}\tilde{v} - \text{sen}^2(\theta/2)\tilde{v} \wedge (\vec{u} \wedge \tilde{v}) + \text{sen}(\theta/2)\tilde{v} \wedge \vec{u}$ .

Reemplazando ahora  $(\vec{v} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{v} \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} \vec{v} = \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} \vec{v}$ , queda:

$$\begin{aligned} \vec{k} &= \text{sen}^2(\theta/2) \vec{u} \cdot \vec{v} \vec{v} + \text{cos}^2(\theta/2) \vec{u} - \text{sen}^2(\theta/2) [\vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} \vec{v}] + \text{sen}(\theta) \vec{v} \wedge \vec{u} = \\ &= 2 \text{sen}^2(\theta/2) \vec{u} \cdot \vec{v} \vec{v} + [\text{cos}^2(\theta/2) - \text{sen}^2(\theta/2)] \vec{u} + \text{sen}(\theta) \vec{v} \wedge \vec{u} \end{aligned}$$

Por último, dado que  $2 \text{sen}^2(\theta/2) = 1 - \text{cos}(\theta)$  y  $\text{cos}^2(\theta/2) - \text{sen}^2(\theta/2) = \text{cos}[\theta]$ , resulta:

$$\vec{k} = [1 - \text{cos}(\theta)] \vec{u} \cdot \vec{v} \vec{v} + \text{cos}[\theta] \vec{u} + \text{sen}(\theta) \vec{v} \wedge \vec{u} \quad (30)$$

que coincide con la expresión de  $\vec{u}_{\text{rot}}$  según (9).

Así queda demostrado que dado  $\vec{u} \in \mathfrak{R}^3$ , si se definen los cuaterniones  $u = 0 + \vec{u}$  y  $\vec{q} = \text{cos}(\theta/2) + \text{sen}(\theta/2)\vec{v}$ , el producto:

$$quq^* = 0 + \vec{k} \text{ con } \vec{k} = \vec{u}_{\text{rot}} \quad (31)$$

donde  $\vec{u}_{\text{rot}}$  es el vector resultante de rotar  $\vec{u}$  un ángulo  $\theta$  alrededor de  $\vec{v}$  en sentido positivo. Adoptando para  $\vec{q}$  el ángulo  $\theta/2 \in [0, \pi]$ , se tendrá  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Puesto en forma matricial según (13):

$$(\vec{k}) = (\vec{u}_{\text{rot}}) = R_\theta (\vec{u}) \quad (32)$$

donde  $\text{tr}(R_\theta) = 1 + 2 \text{cos}(\theta)$ , ver texto asociado a (14).

Denotando  $\vec{q} = \text{cos}(\theta/2) + \text{sen}(\theta/2)\vec{v} = (a, b, c, d)$  con  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ , por ser un cuaternión unitario, al desarrollar el producto de cuaterniones de (31) y reconocer  $\vec{k}$  se obtiene:

$$(\vec{k}) = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(ac + bd) \\ 2(bc + ad) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(-ab + cd) \\ 2(-ac + bd) & 2(ab + cd) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix} (\vec{u}) \quad (33)$$

lo cual permite, comparando con (32) relacionar el cuaternión  $\vec{q}$  con la matriz de rotación, obteniéndose:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(ac + bd) \\ 2(bc + ad) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(-ab + cd) \\ 2(-ac + bd) & 2(ab + cd) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Esta última, teniendo en cuenta que  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$  puede escribirse en la forma:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 2a^2 + 2b^2 - 1 & 2(bc - ad) & 2(ac + bd) \\ 2(bc + ad) & 2a^2 + 2c^2 - 1 & 2(-ab + cd) \\ 2(-ac + bd) & 2(ab + cd) & 2a^2 + 2d^2 - 1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

que comparada con lo indicado por Madgwick (Madgwick, 2010) en su expresión (6) resulta  ${}^A_B R = R_\theta^T = R_\theta^{-1}$ , pues  $R_\theta = {}^B_A R$ .

De (34) se obtiene que  $\text{tr}(R_\theta) = 3a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = 4a^2 - 1$ , donde  $a = \text{cos}(\theta/2)$ ; por lo cual se cumple que  $\text{tr}(R_\theta) = 1 + 2 \text{cos}(\theta)$ .

Por otra parte, según (24) y texto relacionado, para  $\lambda = \theta/2$  dado que el cuaternión de interés es  $\tilde{q} = \cos(\theta/2) + \text{sen}(\theta/2)\tilde{v} = (a, b, c, d)$ , corresponde:

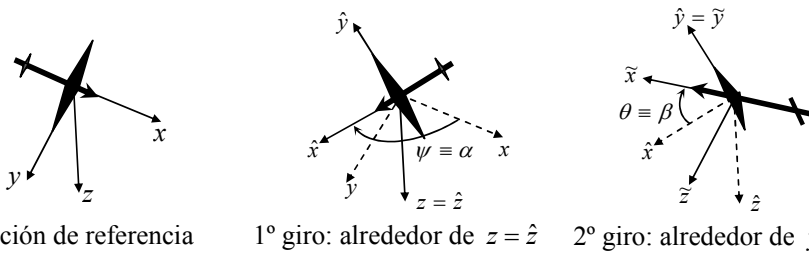
$$\frac{1}{2}\theta = \begin{cases} \arccos(a) \text{ con } \frac{1}{2}\theta \in (0, \pi) & \text{si } \tilde{q} \neq (1, 0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } \tilde{q} = (1, 0, 0, 0) \\ \pi & \text{si } \tilde{q} = (-1, 0, 0, 0) \end{cases} \quad (36)$$

con lo cual, conociendo  $a$ , queda identificado unívocamente el ángulo  $\theta$ .

Así, dado  $\tilde{q}$  se pueden obtener  $\theta$  y  $R_\theta$ . Además con (32) se calcula  $(\tilde{u}_{\text{rot}}) = R_\theta(\tilde{u})$  o también  $(\tilde{u}) = R_\theta^{-1}(\tilde{u}_{\text{rot}})$  con  $R_\theta^{-1} = R_\theta^T$ .

### V. Secuencia aeroespacial - ángulos de Euler

La secuencia aeroespacial contempla el movimiento de rotación en el espacio según tres ejes, los dos primeros giros se representan en la Fig. 2.



**Fig. 2** Secuencia aeroespacial, los dos primeros giros.

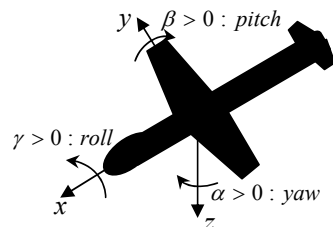
El 1º giro, ángulo  $\psi \equiv \alpha$  en sentido positivo alrededor del eje  $z = \hat{z}$  (eje de *yaw* o guiñada), tiene asociado el cuaternión  $g_1 = (\cos(\alpha/2), 0, 0, \text{sen}(\alpha/2))$  respecto del sistema  $xyz$  de referencia.

El 2º giro, ángulo  $\theta \equiv \beta$  en sentido positivo alrededor del eje  $\hat{y} = \tilde{y}$  (eje de *pitch* o cabeceo), tiene asociado el cuaternión  $g_2 = (\cos(\beta/2), 0, \text{sen}(\beta/2), 0)$  respecto del sistema  $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$  de referencia (el avión levanta la nariz girando sobre el eje de sus alas, ver Fig. 2).

El 3º giro, ángulo  $\phi \equiv \gamma$  en sentido positivo alrededor del eje  $\tilde{x} = x'$  (eje *roll* o balanceo o alabeo), tiene asociado el cuaternión  $g_3 = (\cos(\gamma/2), \text{sen}(\gamma/2), 0, 0)$  respecto del sistema  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  de referencia (el avión gira sobre su eje “cola → nariz”).

En la Fig. 3 se muestra el sentido positivo de los tres giros mencionados, donde  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  son los denominados ángulos de Euler para la secuencia aeroespacial.

A continuación se identificará el cuaternión asociado a cada giro y, mediante la expresión (34), la matriz de rotación correspondiente.



**Fig. 3** Secuencia aeroespacial.

Para lograrlo se deben tener en cuenta las relaciones básicas que surgen de un análisis bidimensional, ver Fig. 4, donde se considera una rotación  $\omega$  en sentido antihorario del sistema de puntos  $(x'_1, x'_2)$  respecto de  $(x_1, x_2)$ .

Siendo  $r$  la distancia del punto  $P$  al origen común y aplicando las fórmulas de transformación de coordenadas polares se obtiene:

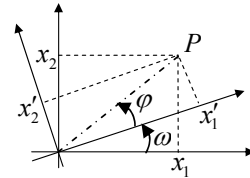


Fig. 4 Rotación en  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{cases} x_1 = r \cos(\varphi + \omega) = \underbrace{r \cos(\varphi)}_{x'_1} \cos(\omega) - \underbrace{r \sin(\varphi)}_{x'_2} \sin(\omega) \\ x_2 = r \sin(\varphi + \omega) = \underbrace{r \sin(\varphi)}_{x'_2} \cos(\omega) + \underbrace{r \cos(\varphi)}_{x'_1} \sin(\omega) \end{cases}$$

de donde, en forma matricial, resulta  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$  o bien:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega) & \sin(\omega) \\ -\sin(\omega) & \cos(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{37}$$

Retomando ahora los mencionados ángulos de Euler para la secuencia aeroespacial y suponiendo que se parte de un sistema original  $xyz$ , se considerarán los tres giros de *yaw* ( $\psi \equiv \alpha$ ), *pitch* ( $\theta \equiv \beta$ ) y *roll* ( $\phi \equiv \gamma$ ), en ese orden y en sentido positivo.

1º giro: En la Fig. 5 se muestra la rotación  $\alpha$  alrededor del eje  $z$ , ángulo medido en sentido antihorario de  $\hat{x}$  respecto de  $x$  en el plano  $xy$ .

Dado que  $z = \hat{z}$ , teniendo en cuenta (37) para relacionar las restantes variables, resulta:

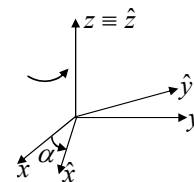


Fig. 5 Eje de giro  $z \equiv \hat{z}$

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{q_1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Por lo expuesto en la sección anterior,  $g_1 = (\cos(\alpha/2), 0, 0, \sin(\alpha/2))$  es el cuaternión asociado a este giro y por (34) su correspondiente matriz de rotación es:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo tanto, observando  $q_1$  resulta:

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = R_\alpha^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{38}$$

donde  $R_{\alpha}^{-1}$  es la matriz de rotación asociada a  $g_1^*$ , el cuaternión conjugado de  $g_1$ .

2º giro: Rotación positiva alrededor de  $\hat{y}$ , con ángulo  $\beta$  de  $\tilde{z}$  respecto de  $\hat{z}$ , ver Fig. 6. Siendo  $\hat{y} \equiv \tilde{y}$ , la expresión (37) establece la relación entre las otras variables, resulta:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}}_{q_2} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$

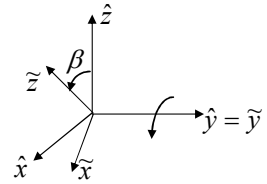


Fig. 6 Eje de giro  $\hat{y} \equiv \tilde{y}$

En este caso el cuaternión asociado es  $g_2 = (\cos(\beta/2), 0, \sin(\beta/2), 0)$ , para el cual aplicando (34) corresponde la matriz de rotación:

$$R_{\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

de donde, comparando con  $q_2$  se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = R_{\beta}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \tag{39}$$

Siendo  $R_{\beta}^{-1}$  la matriz de rotación asociada a  $g_2^*$ .

Por último, el 3º giro es en sentido positivo en un ángulo  $\gamma$  alrededor de  $\hat{x}$ , la terna cambia de  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  a la definitiva  $x'y'z'$ . En este caso, dado que  $x' = \tilde{x}$ , se tiene:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ 0 & -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix}}_{q_3} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$$

concuaternión  $g_3 = (\cos(\gamma/2), \sin(\gamma/2), 0, 0)$  y matriz de rotación:

$$R_{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix}$$

Entonces, comparando con  $q_3$  resulta:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_{\gamma}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \tag{40}$$

siendo  $R_{\gamma}^{-1}$  la matriz de rotación asociada a  $g_3^*$ .

Dadas (38), (39) y (40), la composición de los tres giros tiene asociada la matriz de rotación  $M$  tal que:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_\gamma^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = R_\gamma^{-1} R_\beta^{-1} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \underbrace{R_\gamma^{-1} R_\beta^{-1} R_\alpha^{-1}}_M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (41)$$

Se verifica que esta matriz  $M = R_\gamma^{-1} R_\beta^{-1} R_\alpha^{-1} = (R_\alpha R_\beta R_\gamma)^{-1}$  es la matriz de rotación asociada al cuaternión que se obtiene como producto de los cuaterniones conjugados correspondientes a cada giro parcial. Es decir,  $M$  es la matriz de rotación de:

$$g^* = g_3^* g_2^* g_1^* = (g_1 g_2 g_3)^* \quad (42)$$

Operando en forma matricial se obtiene:

$$M = \begin{pmatrix} C_\alpha C_\beta & S_\alpha C_\beta & -S_\beta \\ -S_\alpha C_\gamma + C_\alpha S_\beta S_\gamma & C_\alpha C_\gamma + S_\alpha S_\beta S_\gamma & C_\beta S_\gamma \\ C_\alpha S_\beta C_\gamma + S_\alpha S_\gamma & S_\alpha S_\beta C_\gamma - C_\alpha S_\gamma & C_\beta C_\gamma \end{pmatrix} \quad (43)$$

donde  $C_\omega = \cos(\omega)$  y  $S_\omega = \sin(\omega)$ .

Siendo  $R_\theta$  de (35) la matriz de rotación de  $g = (a,b,c,d)$ , para el cuaternión conjugado  $g^* = (a,-b,-c,-d)$  corresponde  $R_{\theta}^{-1} = M$ .

Entonces:

$$R_{\theta}^{-1} = \begin{pmatrix} 2a^2 + 2b^2 - 1 & 2(bc + ad) & 2(-ac + bd) \\ 2(bc - ad) & 2a^2 + 2c^2 - 1 & 2(ab + cd) \\ 2(ac + bd) & 2(-ab + cd) & 2a^2 + 2d^2 - 1 \end{pmatrix} \doteq \underbrace{\begin{pmatrix} M11 & M12 & M13 \\ M21 & M22 & M23 \\ M31 & M32 & M33 \end{pmatrix}}_M \quad (44)$$

Por simple inspección, de (43) y (44) resultan:

$$\begin{cases} \langle 1 \rangle & -2ac + 2bd = M13 = -\sin(\beta) \\ \langle 2 \rangle & 2ab + 2cd = M23 = \cos(\beta)\sin(\gamma) \\ \langle 3 \rangle & 2a^2 + 2d^2 - 1 = M33 = \cos(\beta)\cos(\gamma) \\ \langle 4 \rangle & 2bc + 2ad = M12 = \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \langle 5 \rangle & 2a^2 + 2b^2 - 1 = M11 = \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{cases} \quad (45)$$

Siendo  $g = g_1 g_2 g_3 = (a,b,c,d)$ , desarrollando el producto se obtienen:

$$\begin{cases} a = \cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2) + \sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2) \\ b = -\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\cos(\gamma/2) + \cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\sin(\gamma/2) \\ c = \cos(\alpha/2)\sin(\beta/2)\cos(\gamma/2) + \sin(\alpha/2)\cos(\beta/2)\sin(\gamma/2) \\ d = \sin(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2) - \cos(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2) \end{cases} \quad (46)$$

Desde las relaciones numeradas <1> a <5> en (45), suponiendo denominadores no nulos, se tiene:

$$\langle 1 \rangle : M13 = -\text{sen}(\beta) \Rightarrow \beta = \arcsen(-M13) \quad (47)$$

con lo cual no queda unívocamente definido  $\beta$  salvo que se imponga, por ejemplo,  $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Por otra parte:

$$\frac{\langle 2 \rangle}{\langle 3 \rangle} = \frac{M23}{M33} = \frac{\text{sen}(\gamma)\cos(\beta)}{\cos(\gamma)\cos(\beta)} \Rightarrow \gamma = \begin{cases} \text{atan2}(M23, M33) & \text{si } \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \text{atan2}(-M23, -M33) & \text{si } \beta \notin (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad (48)$$

$$\frac{\langle 4 \rangle}{\langle 5 \rangle} = \frac{M12}{M11} = \frac{\text{sen}(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} \Rightarrow \alpha = \begin{cases} \text{atan2}(M12, M11) & \text{si } \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \text{atan2}(-M12, -M11) & \text{si } \beta \notin (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad (49)$$

donde, por definición,  $\text{atan2}(y, x) = \tan^{-1}(y/x)$  si  $x \neq 0$ ,  $\text{atan2}(y, 0) = \pi/2$  si  $y > 0$ ,  $\text{atan2}(y, 0) = -\pi/2$  si  $y < 0$ .

Para aquellas aplicaciones donde se cumple que  $-\pi/2 < \beta < \pi/2$ , los tres ángulos queden unívocamente determinados, resultando:

$$\begin{cases} \text{Yaw } (\psi \equiv \alpha) & : \alpha = \text{atan2}(M12, M11) \\ \text{Pitch } (\theta \equiv \beta) & : \beta = \arcsen(-M13) \text{ con } \beta \in (-\pi/2, \pi/2) \\ \text{Roll } (\phi \equiv \gamma) & : \gamma = \text{atan2}(M23, M33) \end{cases} \quad (50)$$

similares a las fórmulas de conversión de MicroStrain Inc. (MicroStrain, 2003).

Desde (44) y teniendo en cuenta que  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ , surge que  $\text{tr}(R_\theta^{-1}) = \text{tr}(M)$ , es decir:

$$4a^2 - 1 = M11 + M22 + M33$$

por lo tanto:

$$|a| = \sqrt{1 + M11 + M22 + M33} / 2$$

pero, por otra parte, los cuaterniones  $(a, b, c, d)$  y  $(-a, -b, -c, -d)$  generan la misma matriz  $M$ . En consecuencia, partiendo de  $M$  no es posible determinar el signo de  $a$ .

Así, si se adopta por ejemplo  $a > 0$ , por simple comparación de las dos matrices que figuran en (44) surgen las siguientes expresiones que permiten obtener el cuaternión a partir de la matriz  $M$ .

$$\begin{cases} a = \sqrt{1 + M11 + M22 + M33} / 2 \\ b = (M23 - M32) / (4a) \\ c = (M31 - M13) / (4a) \\ d = (M12 - M21) / (4a) \end{cases} \quad (51)$$

Expresiones que son equivalentes a la primera forma de cálculo (*if max = test1*) de MicroStrain Inc. (MicroStrain, 2003).

## VI. Comentarios Finales

Se ha realizado una exposición detallada, que incluye interpretaciones geométricas y justificaciones de las relaciones fundamentales entre ángulos de Euler, matriz de rotación y cuaternión correspondiente a la rotación de un cuerpo en el espacio 3D.

Es de particular interés la interpretación y uso de las relaciones mencionadas pues, en combinación con algoritmos de filtrado y procesamiento digital de señales en tiempo real, se utilizan en el diseño de sistemas automáticos de posicionamiento, seguimiento y control para diferentes aplicaciones tecnológicas.

Si bien se adoptaron los ángulos de Euler para la denominada secuencia aeroespacial, con similar razonamiento se pueden obtener las relaciones correspondientes a otras secuencias típicas, según las necesidades de cada aplicación.

**Reconocimientos:** El presente trabajo se ha realizado con aporte parcial del proyecto PIDDEF 26/12.



## Referencias

- Chou J.C.K. (1992) “Quaternion kinematic and dynamic differential equations,” IEEE Trans. Robot. Autom., vol. 8, no. 1, pp. 53–64.
- Eberly D. (2010). “Quaternion Algebra and Calculus, Geometric Tools”, disponible en: <http://www.geometrictools.com/Documentation/Quaternions.pdf>
- Madgwick S.O.H. (2010), “An efficient orientation filter for inertial and inertial / magnetic sensor arrays”, x-io Technologies Limited, Open source IMU and AHRS algorithms (<http://www.x-io.co.uk/open-source-imu-and-ahrs-algorithms>) reporte interno original disponible en: [http://www.x-io.co.uk/res/doc/madgwick\\_internal\\_report.pdf](http://www.x-io.co.uk/res/doc/madgwick_internal_report.pdf)
- Marins J.L., Yun X., Bachmann E.R., McGhee R.B. and Zyda M.J. (2009) “An extended Kalman filter for quaternion-based orientation estimation using MARG sensors”, Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intelligent Robots and Systems, Mani, HI, pp. 2003–2011.
- MicroStrain Inc. (2003) “Orientation Quantity Conversion Formulas”, reporte interno, disponible en: <http://files.microstrain.com/Orientation%20Conversion%20formulas.pdf>
- Kemp. B., Janssen A.J.M.W. and van der Kamp B. (1998) “Body position can be monitored in 3D using accelerometers and earth-magnetic field sensors,” Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol., vol. 109, pp. 484–488.
- Kirtley C. (2001) “Summary: Quaternions vs. Euler angles,” BIOMCH-L Discussion Disponible: <http://isb.ri.ccf.org/biomch-l/archives/biomch-l-2001-05>.
- Rodríguez Padilla J.J. “Capítulo 4 – Rotaciones y Cuaternios” de la tesis: “El Algebra y la geometría de los cuaternios y algunas de sus aplicaciones”, Universidad de Sonora, México; disponible como tesis digital en: [http://bibliotecadigital.uson.mx/bdg\\_tesisIndice.aspx?tesis=21070](http://bibliotecadigital.uson.mx/bdg_tesisIndice.aspx?tesis=21070)
- Sabatini A.M. (2005) “Quaternion based strap-down integration method for applications of inertial sensing to gait analysis,” Med. Biol. Eng. Comput., vol. 42, pp. 97–105.
- Sabatini A.M. (2006) “Quaternion-Based Extended Kalman Filter for Determining Orientation by Inertial and Magnetic Sensing”, IEEE Transactions On Biomedical Engineering, Vol. 53, N°. 7.

Systron Donner Inertial (2011), “MMQ-G User’s Guide”, disponible en: [http://www.systron.com/sites/default/files/964856\\_e\\_mmq-g\\_user\\_s\\_guide\\_1\\_.pdf](http://www.systron.com/sites/default/files/964856_e_mmq-g_user_s_guide_1_.pdf)

Waldron, Kenneth, Schmiedeler, James (2008) “Kinematics”, Springer Handbook of Robotics.