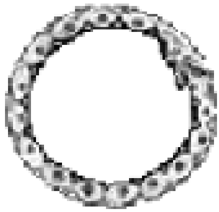
Los Números Transfinitos

Esteban di Tada*

2005-2006

Introducción



Desde la antigüedad la comprensión del concepto de infinito fue un motivo de estudio para una gran cantidad de pensadores. Ya en la época de los Egipcios se representaba la idea de las cosas que no tienen ni comienzo ni fin por medio de una serpiente mordiéndose su propia cola. La inmortalidad, la continuidad, el movimiento perpetuo del universo, el devenir de las estaciones, el fluir de los ríos eran representados por ese símbolo que recibió, por parte de los griegos, el nombre de ***Ouroboros***. Esta serpiente mordiéndose su propia cola hizo su aparición alrededor del año 1600 antes de Cristo en Egipto de donde se trasladó a Fenicia y Grecia. Fueron los griegos los que le dieron el nombre de ***Ouroboros***.

A fines del siglo 16° Lope de Vega escribió este maravilloso soneto en el que en el último terceto define el infinito por medio de una frase recursiva en el tiempo.

¿Qué tengo yo que mi amistad procuras?
¿Qué interés se te sigue, Jesús mío
que a mi puerta, cubierto de rocío,
pasas las noches del invierno escuras?

¡Oh, cuánto fueron mis entrañas duras,
pues no te abrí! ¡Qué estraño desvarío
si de mi ingratitud el yelo frío
secó las llagas de tus plantas puras!

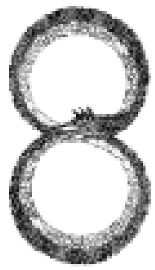
¡Cuántas veces el ángel me decía:
Alma, asómate agora a la ventana,
verás con cuánto amor llamar porfía!

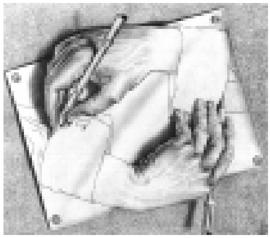
¡Y cuántas, hermosura soberana:
Mañana le abriremos —respondía—,
para lo mismo responder mañana!

---

* Decano de la Facultad de Ingeniería. Universidad de Palermo.

Más de 30 siglos después de la creación del Ouroboros, Maurits Cornelius Escher, célebre grabador holandés nacido en la ciudad de Leeuwrden en el año 1898, simbolizó la misma idea por medio de un grabado en el que se representan dos manos, una dibujando a la otra. Hijo de un ingeniero civil, él mismo se ubicó más cerca de los matemáticos que de los artistas. Su obra refleja su permanente preocupación por el estudio de los procesos recursivos y de transformación de los objetos[1] .





Casi simultáneamente el matemático checo Kurt Gödel (Nacido en la actual ciudad de Brno, República Checa, en 1906) demostraba su famoso teorema por medio del cual probaba que todo sistema axiomático es incompleto y que existen sentencias cuya verdad o falsedad no se pueden probar. Y que para demostrarlas era necesario ampliar la base axiomática. Pero que entonces nuevas sentencias aparecerían que no podrían ser probadas.

Resulta sorprendente que en esa misma época, en el año 1927, el físico alemán Heisenberg[2] desarrolló el principio de incertidumbre. Establece que es imposible conocer en forma exacta y simultánea la posición y la velocidad de una partícula. Por ejemplo, si en un experimento se determina con una gran exactitud la velocidad de un electrón, el conocimiento de su posición, en un cierto instante, tendrá un error muy grande, por más preciso que sea el instrumental utilizado.

Las implicaciones filosóficas de la indeterminación crearon una fuerte corriente de misticismo entre algunos científicos, que interpretaron que el concepto derribaba la idea tradicional de causa y efecto. Otros, entre ellos Albert Einstein, consideraban que la incertidumbre asociada a la observación no contradice la existencia de leyes que gobiernen el comportamiento de las partículas, ni la capacidad de los científicos para descubrir dichas leyes.

También en esa época, en 1936, Alan Turing[3] dio una respuesta al problema planteado por David Hilbert[4] sobre si las matemáticas son decidibles o no. Es decir, si existe un método definido (algoritmo) compuesto por una cantidad finita de pasos que pueda

1. No se puede dejar de mencionar el extraordinario libro **Gödel, Escher y Bach: an Eternal Golden Braid** de Douglas R. Hofstadter (Premio Pulitzer Wienner, 1980)

2. Werner Karl Heisenberg nació en Wurzburg, Alemania, el 5 de diciembre de 1901 y murió en Munich, el 1 de febrero de 1976.

3. Alan Mathison Turing nació el 23 de Junio de 1912, en Paddington, Londres. Murió el 7 de juunio de 1954 en Cheshire, Inglaterra. Trabajó, al comienzo de la segunda guerra mundial, en el proyecto de rotura de las claves de Enigma, la máquina alemana de cifrado.

4. David Hilbert fue un famoso matemático nacido el 23 de enero de 1862 en Königsberg, Prusia (ahora Kaliningrad, Rusia) y fallecido el 14 de febrero en Göttingen, Alemania. Formuló los famosos 23 desafíos matemáticos en el segundo congreso de matemática realizado en Paris en 1900, muchos de los cuales aún permanecen sin resolver.

aplicarse a cualquier sentencia matemática y que permita determinar si esa sentencia es cierta o no. En el artículo *On Computable Numbers*, Turing construyó un modelo formal de computador, que es conocido actualmente como la Máquina de Turing, y demostró que había problemas que una máquina no podía resolver. La máquina de Turing es el primer modelo teórico de lo que luego sería un computador programable. Con el tiempo a este tipo de máquina se la conoció como máquina de estados finitos, debido a que, en cada etapa de un cálculo, la siguiente acción de la máquina se contrastaba con una lista finita de instrucciones y de estado posibles.

Mediante este modelo teórico y el análisis de complejidad de algoritmos, fue posible la categorización de problemas computacionales de acuerdo a su comportamiento, apareciendo así, el conjunto de problemas denominados **P** y **NP**, cuyas soluciones pueden obtenerse o no en tiempos que dependen polinomialmente de la dimensión de los datos.

De hecho, puede probarse matemáticamente que para cualquier programa de computadora es posible crear una máquina de Turing equivalente. Esta prueba resulta de la Tesis de Church-Turing, formulada por Alan Turing y Alonzo Church, en forma independiente a mediados del siglo XX.

Recién a fines del siglo XIX Georg Cantor estableció una teoría que permitió conocer la estructura del Infinito.

Los antiguos griegos descubrieron la existencia de magnitudes geométricas inconmensurables que no podían representarse por números racionales (números que resultan del cociente de dos números enteros y que eran los únicos que los griegos conocían). Y se descubrieron así los números irracionales que tienen una cantidad infinita de decimales (cómo por ejemplo la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos unitarios).

Definición de Infinito

Quizá un punto de partida para desentrañar el concepto que subyace detrás de la palabra infinito, sería buscar su significado en el diccionario de la Real Academia Española[5] . Las acepciones que se encuentran son las siguientes:

1. Que no tiene ni puede tener fin ni término.
2. Muy numeroso o enorme.
3. Lugar impreciso en su lejanía y vaguedad. *La calle se perdía en el infinito.*
4. En una cámara fotográfica, última graduación de un objetivo para enfocar lo que está distante.
5. Valor mayor que cualquier cantidad asignable.
6. Signo (∞) con que se expresa ese valor.
7. Excesivamente, muchísimo

De un análisis de estas acepciones surgen las siguientes conclusiones:

5. Edición 22ª del diccionario de la Real Academia Española (2001)

La primera, ***que no tiene ni puede tener fin ni término***, es imprecisa. ¿Tiene la tierra fin? Si se define por fin el llegar a un punto a partir del cual es imposible seguir, nuestro globo terráqueo sería infinito ya que, caminando por un meridiano, nunca se llegaría al fin de la superficie.

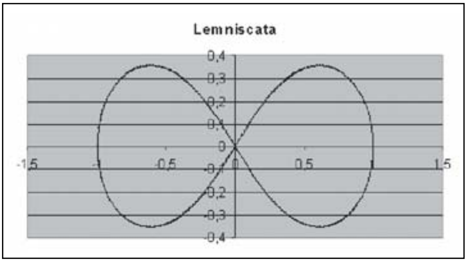
La segunda, ***muy numeroso o enorme***, es aún más imprecisa. ¿Qué significa enorme o numeroso? Mil, cien mil, un billón. Todos los átomos del sistema solar. Mil puede ser una cifra enorme en relación con uno, pero ínfima en relación con un uno seguido de mil ceros.

La tercera, ***lugar impreciso en su lejanía y vaguedad***, podría aplicarse recursivamente a la propia definición de infinito. Lejanía, vaguedad son palabras que, si bien pueden representar una idea suficientemente precisa en el lenguaje literario o coloquial, son completamente imprecisas desde un punto de vista formal.

La cuarta, ***en una cámara fotográfica, última graduación de un objetivo para enfocar lo que está distante***, es aplicable en un caso extremadamente específico careciendo, por lo tanto, de la suficiente generalidad.

La quinta, ***valor mayor que cualquier cantidad asignable***, carece también de precisión formal. ¿Qué es valor? ¿Qué es asignar? ¿A quién se le asigna el valor?

La sexta, ***signo (∞) con que se expresa ese valor,*** sólo expresa una forma de representar un valor que no se sabe si realmente existe. Cabría preguntarse: ¿es el infinito un valor? Este símbolo fue introducido en la notación matemática por el matemático inglés John Wallis (1616-1703) en una de sus obras más importantes: ***Aritmética Infinitorum***.. Se inspiró en la forma de la curva llamada lemniscata introducida por Jacob Bernoulli [6] (1655-1705) cuya ecuación es $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.



La séptima, ***excesivamente, muchísimo***, merece el mismo comentario que la segunda acepción. Las palabras excesivamente, muchísimo son completamente vagas.

Por lo tanto no es posible basarse en la definición de la Real Academia Española para poder conocer el significado del infinito. En este trabajo se tratará de desentrañar su estructura. El objetivo parece muy ambicioso. Pero trataremos de lograrlo.

Se iniciará un viaje para tratar de aclarar algunos de los halos de misterio que rodean al infinito.

6. Los hijos de los genios, de cualquier ciencia o arte, no suelen ser genios.. Los Bernoulli son la excepción: Tres generaciones de matemáticos tiene esta familia. La saga comienza con Jacob I y Johann I. En la segunda generación, tres hijos de Johann I, Daniel I Johann II y Nicolás II y un sobrino, Nicolas I. En la tercera generación, tres hijos de Nicolas II, Johann III, Daniel II y Jacob II. Todos fueron matemáticos destacados, especialmente Jacob I y Johann I. Los Bernoulli eran originarios de los Paises Bajos pero huyeron a Suiza por la persecución que los españoles (concretamente el Duque de Alba, en el reinado de Felipe II) hicieron a los que no eran católicos.

Un poco de Historia

Aparentemente no hay registros fehacientes en relación con la conceptualización o discusión del concepto de infinito. Los antiguos griegos llamaron apeyron ***(απειρων)*** a aquello que no tiene límites, que está indefinido[7]. La palabra entrañaba una cierta orientación negativa ya que para los griegos todo lo indefinido no era perfecto. También hacía referencia al caos original a partir del cual se había formado nuestro Universo.

Quizá el primer filósofo en enfrentarse con la dificultad del concepto de infinito, fue Zenón de Elea, nacido alrededor del año 490 antes de la era Cristiana. Discípulo o hijo de Parménides fundador de la escuela de Elea[8] que desarrolló una filosofía basada en la dialéctica y la lógica. Basaba sus pensamientos en la concepción del Ser, su unicidad, indivisibilidad, continuidad e inmutabilidad, la inexistencia de principio y de fin. Niega la existencia del espacio ya que si existiera debería existir otro espacio que lo contuviera. Con el fin de defender sus principios enuncia dos célebres paradojas: la de la flecha y la de Aquiles y la tortuga.

La primera (la de la flecha) se enuncia de la siguiente manera: Si se dispara una flecha hacia una pared desde un punto de partida situado a una distancia **D**, la flecha no llegará nunca a la pared. Para aseverar esto, Zenon argüía que para llegar a la pared la flecha debía recorrer una distancia **D**. Pero que para lograr ello, debía primero llegar a la mitad de su recorrido lo que requeriría un tiempo diferente de cero. Cuando ya estuviera en la mitad del recorrido era necesario que, para llegar a la pared, llegara primero a la mitad de la mitad del recorrido, para la cual debía transcurrir un tiempo adicional diferente de cero. Y así sucesivamente. El tiempo total sería, entonces, la suma de una infinidad de tiempos todos diferentes de cero. Su suma crecería indefinidamente y por tanto nunca llegaría. [9]

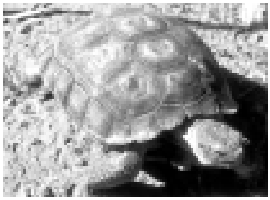
La segunda paradoja, similar a la anterior, se refiere a la persecución que hace Aquiles (hijo de Peleo y la diosa Tetis) a una tortuga. El animal se encuentra delante de

---

7. La palabra apeiron (απειρων) era una adjetivo que en griego antiguo significaba ilimitado, infinito, Innumerable. También se empleaba para calificar aquello de lo cual uno no puede desprenderse, inextricable.

8. La ciudad de Elea aparece fundada en la costa de Lucania entre los años 540 y 539 antes de la era cristiana, en el sur de Italia. Según Herodoto habitantes de Focea jónica, atendiendo a las predicciones de la Pythia de Delfos, ocupan un territorio al que dieron el nombre de Elea (también conocida en sus inicios como Velia)

9. Si la velocidad fuera **V** y la distancia **D**, el tiempo total sería $T = D/V$. De acuerdo al argumento de Zenon los tiempos a sumar serían $T/2 + T/4 + T/8 + ... + T/2^n + ...$. En aquella época no se había aún desarrollado la teoría de la convergencia de series. En matemática elemental se estudia que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$ converge y que tiende a 1. En realidad habría que decir que nunca llegaría pero que se podía acercar tan cerca como se deseara.



Aquiles y, por supuesto, corre mucho más lento que él. El razonamiento es similar al anterior ya que cuando ambos se lancen a correr en la misma dirección, antes de alcanzar a la tortuga, Aquiles debe pasar por el punto donde se encontraba la tortuga al iniciar la marcha, pero donde ya no está dado que avanzó en el tiempo transcurrido. Recorrer este trayecto le insumirá a Aquiles un cierto tiempo diferente de cero. Este mismo argumento se puede aplicar a partir de ese punto con lo que concluía que, dado que el tiempo que le llevaría en alcanzar la tortuga era la suma de infinitos tiempos todos diferentes de cero, Aquiles nunca alcanzaría a la tortuga.

La conclusión de Zenon fue que el movimiento no existía.

Para los griegos existían dos tipos de infinito: el potencial y el actual. El potencial era el que se obtenía como consecuencia de repetir indefinidamente un proceso. Como por ejemplo sumar un **1** a un dado número y luego continuar sumándole **1** al resultado y así sucesivamente. Como Lope de Vega dice en el último terceto de su soneto. El infinito actual era el infinito tomado como un número, como un todo. Por lo tanto el conjunto de los enteros era potencialmente infinito porque siempre era posible agregar una unidad al número más grande para obtener así un número aun mayor. Aristóteles argumentaba que la mayoría de las magnitudes no podían ni siquiera potencialmente ser infinitas dado que su crecimiento, como consecuencia de las sumas repetidas, podría hacerlas crecer más allá de las dimensiones del Universo. Aristóteles decía que el infinito es imperfecto, interminable e impensable y prácticamente fue ésta la última contribución de los griegos al concepto de infinito.

Los griegos fueron en general reluctantes al uso de inconmesurables[10] . Uno de los últimos grandes matemáticos griegos fue Diofantes (vivió en Alejandría en el siglo III de la era cristiana) quien desarrolló un campo de la matemática que fue el de la resolución de ecuaciones con soluciones enteras o racionales[11] (un número racional se puede expresar como el cociente de dos números enteros). Este hecho puede interpretase como una negación de la verdadera naturaleza e inconmensurabilidad de las soluciones de dichas ecuaciones.

Los árabes fueron, sin lugar a dudas, los herederos del conocimiento matemático de los griegos y lograron importantes avances especialmente en el campo del álgebra. Trabajaron con los números irracionales como objetos pero no se detuvieron a analizar su naturaleza. Debieron pasar otros 10 siglos para que Cantor desarrollara la teoría de los números transfinitos.

Siguiendo a los árabes, los matemáticos europeos continuaron empleando los números irracionales aun cuando hubo una gran confusión con el concepto de infinito. San Agustín aceptó la idea platónica de que Dios era infinito y que podía tener

---

10. Según el diccionario de la Real Academia el significado de inconmensurable es enorme, que debido a su gran magnitud no se puede medir.

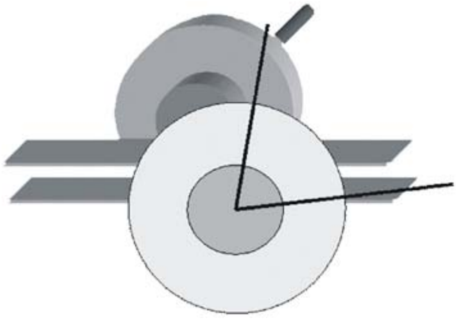
11. Con el advenimiento de Internet y la necesidad de realizar transacciones seguras por la red la teoría de los números enteros ha tenido un gran desarrollo.

pensamientos infinitos. Santo Tomás de Aquino aceptaba el carácter infinito de Dios pero rechazaba la idea de que pudiera hacer cosas infinitas.

Una gran paradoja surgió en el pensamiento medieval. Era aceptado que una circunferencia más grande debía tener más puntos que una más pequeña aunque existía una correspondencia biunívoca entre los puntos de una y otra. Y esto no tenía una explicación formal en base a los conocimientos de esa época.

Dentro de esa línea de pensamiento, en el año 1600 Galileo concibió una experiencia que lo enfrentó con un serio problema vinculado con el concepto de infinito y que recién se pudo formalizar a fines del siglo XIX. Supuso la siguiente experiencia:

Imaginó que dos ruedas de diferentes diámetros, rígidamente unidas por su centro, se deslizan girando alrededor de un eje común sobre dos planos paralelos tal cual lo indica la figura. La rueda de menor diámetro resbalaría sobre el plano correspondiente en tanto que la mayor no lo haría debido a que, al dar una vuelta completa la distancia recorrida por la última era mayor.



Pero lo que más lo desconcertaba era que, como se muestra en la figura existe, una correspondencia biunívoca entre los puntos de ambas circunferencias, la que puede definirse por medio de los radios que cortan a ambas figuras. A cada punto de la circunferencia menor le corresponde uno y solo un punto de la circunferencia mayor y viceversa. Trató de darle una explicación considerando que la circunferencia era una figura que se obtenía como un proceso límite de un polígono regular a medida que la cantidad de lados aumentaba indefinidamente. O que existían agujeros en la circunferencia mayor. En realidad se enfrentó con uno de las características, a veces paradójicas, del concepto de infinito. Existen conjuntos que aun teniendo la misma cantidad de puntos tienen magnitudes diferentes. Sin embargo, con la intuición de un genio, concluyó que el infinito no es un concepto inconsistente sino que obedece a diferentes reglas.

La naturaleza del infinito no fue enunciada claramente hasta 1874 con el trabajo fundamental de Georg Cantor. En el ínterin tanto el cálculo como el análisis se desarrollaron como una de las áreas más importantes de las matemáticas.

La teoría formal de conjuntos y los números Transfinitos de Cantor

Historia y paradojas

La noción de conjunto no fue abordada de manera orgánica y formal por los matemáticos anteriores al siglo XIX. Recién bien a fines del 1800 se establecieron las bases de una teoría formal de conjuntos. Y a diferencia de otras ramas de la Matemática en las que su desarrollo fue la contribución de numerosos científicos, la teoría de conjuntos fue la obra de un solo científico: **Georg Cantor**.

Uno de los resultados más importantes de los trabajos de Cantor fue la introducción de los números transfinitos los que, luego de más de 20 siglos, unieron los conceptos de infinito actual y potencial de Aristóteles y permitieron definir el concepto infinito de una manera precisa.

Muchos fueron los pensadores de la humanidad que trataron de dilucidar los misterios del infinito. Después de Zenon de Elea muchos filósofos y matemáticos trataron de contribuir a esclarecer este concepto. Pero recién fue Cantor quien planteó en forma concreta una teoría formal de conjuntos y a partir de ellos la teoría de los números transfinitos.

Bolzano[12], filósofo y matemático de gran profundidad de pensamiento, defendió el concepto de conjuntos infinitos que hasta ese momento, se creía inexistente o imposible de ser conceptualizado por el ser humano. Dio ejemplos para mostrar que, contrariamente a lo que sucedía con los conjuntos finitos, se podía definir una correspondencia 1 a 1 (biyección) entre los elementos de un conjunto infinito y uno de sus subconjuntos propios[13]. Esta idea se transformó, luego, en una de las definiciones de conjunto infinito.

Los primeros trabajos de Cantor se refirieron a la teoría de números y fueron publicados entre 1867 y 1871. Un suceso de gran importancia en su vida marcó su futuro como matemático, Fue cuando, en el año 1872, realizó un viaje a Suiza. Allí conoció a Richard Dedekind con quien estableció una relación de profunda amistad hasta el final de su vida. Muchas cartas se intercambiaron desde entonces y, aún cuando en ellas no se incluían muchos temas de matemática, el pensamiento abstracto y lógico de Dedekind influyó profundamente en Cantor.

Cantor abandonó la teoría de números y comenzó a profundizar el estudio de las series trigonométricas. Estos trabajos contienen las primeras ideas sobre la teoría de conjuntos así como importantes resultados sobre los números irracionales.

En el año 1874 Cantor publicó un artículo en la publicación de Crelle[14] que puede considerarse como el lanzamiento de la teoría de conjuntos. Una continuación de este trabajo inicial fue enviada por Cantor en 1878 para su publicación en Crelle. Ya entonces la teoría de conjuntos era el centro de una gran controversia. Leopold Kronecker[15], que integraba el equipo editorial de Crelle, no compartía las ideas revolucionarias de Cantor.

---

12. Bernhard Bolzano sacerdote de Bohemia que nació en 1781 y falleció en 1848, estableció definiciones de límite, continuidad, derivada y convergencia en forma similar a Cauchy. Descubrió un método de construir funciones continuas no diferenciables en ningún punto. Fue más bien un matemático riguroso que intuitivo.

13. Por ejemplo, una correspondencia simple es la que asocia a cada número entero otro con el doble de valor. Esta correspondencia puede aplicarse a todos los enteros y da como resultado los números pares.

14. August Leopold Crelle fue un matemático alemán nacido en 1780 y fallecido en 1855. En 1826 fundó una publicación dedicada exclusivamente a matemática llamada *Jurnal für die reine und angewandte Mathematik* (Revista de Matemática Pura y Aplicada)

15. Matemático prusiano nacido en 1823 y fallecido en 1891 en Alemania.

Ante la oposición de Kronecker a publicar su trabajo, Cantor estuvo tentado de retirarlo. Dedekind lo convenció que no lo hiciera y tanto él como Weierstrass apoyaron su publicación. Cantor jamás volvió a enviar un trabajo a dicha revista.

En los años 1895 y 1897 se publicaron en Mathematische Annalen dos trabajos de Georg Cantor bajo la denominación de "***Contribuciones a las bases de la Teoría de los Números Transfinitos".*** En ellos desarrollaba la teoría de los números transfinitos a partir del concepto de conjunto.

Cantor definía un conjunto como

Una colección de objetos concretos o abstractos definibles y distinguibles considerada como un todo

Aún cuando esta definición resulta clara en el lenguaje coloquial, carece de la suficiente formalización para sentar sobre ella las bases de una teoría formal de conjuntos. Por otro lado es de tal nivel de generalidad que prácticamente todo en el universo es un conjunto. La paradoja de Betrand Russell, descubierta en 1901, mientras trabajaba en su monumental obra *Principles of Mathematics*[16], prueba que a partir de una definición tan general y poco formal pueden construirse contradicciones lógicas. Aun cuando Russell descubrió la paradoja en forma independiente, existe evidencia de que otros matemáticos, incluyendo a Ernst Zermelo y David Hilbert, se habían dado cuenta que existían contradicciones en la teoría de conjuntos. Sin embargo fue Russell el primero en discutir en profundidad la paradoja en sus trabajos, el primero en formular posibles soluciones y el primero en apreciar en su totalidad la real importancia de la misma. Un capítulo entero de *Principles of Mathematics* fue dedicado a discutir la contradicción y un apéndice de dicha obra fue dedicado a la Teoría de los Tipos cuya aplicación él sugería como solución.

Russell descubrió la paradoja al considerar el teorema de la potencia de conjuntos[17] de Cantor que establece que la cantidad de elementos de un conjunto (número cardinal) que contiene más de un elemento es menor que la cantidad de subconjuntos posibles de formar con sus elementos. En el caso de conjuntos finitos este resultado coincide con nuestra intuición pero en el caso de conjuntos no finitos no resulta tan evidente. Es fácilmente demostrable que existen por lo menos tantos subconjuntos como elementos tiene el conjunto, ya que por cada elemento del conjunto original existirá un subconjunto compuesto por sólo ese elemento. Así por ejemplo si se considera el conjunto

$$\mathbf{A=\{a,b,c\}}$$

El conjunto de todos los subconjuntos que se pueden formar con los elementos de A será

$$\mathbf{P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}}$$

Es decir, en total, $\mathbf{8=2^3}$ subconjuntos (El conjunto vacío $\varnothing$ es un subconjunto de todo conjunto)

16. Principia Matemática
17. Se llama potencia de conjuntos al conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto.

Cantor demostró que la cantidad de elementos del conjunto y la cantidad de subconjuntos no podía ser la misma, ya que si así lo fuera debería existir una función biyectiva **f** entre los elementos del conjunto y los subconjuntos tal que $\mathbf{Df = A \wedge Rf = P(A)}$[18]. Sin embargo puede probarse que esto es imposible. Para formalizar las ideas, sea **A** el conjunto y **P(A)** el conjunto de todos los subconjuntos que se pueden formar con los elementos de **A.** La función **f** hará corresponder a cada $\mathbf{a \in A}$ un subconjunto $\mathbf{f(a)=C \in P(A)}$. A algunos elementos del conjunto **A** la función **f** les hará corresponder subconjuntos de **A** que lo contienen mientras que a otros no. Es decir si $\mathbf{x \in A}$ existirán **x** tales que $\mathbf{x \in f(x)}$ y otros para los que $\mathbf{x \notin f(x)}$. Defínase como **B** al conjunto de todos los elementos de **A** tales que la aplicación de la función **f** da por resultado un conjunto que no contiene el elemento original. Formalmente este conjunto puede definirse de la siguiente manera

$$\mathbf{B = \{y : y \in A \wedge y \notin f(y)\}}$$

Pero **B** es un subconjunto de **A**. Por lo tanto existirá un elemento $\mathbf{x \in A}$ tal que $\mathbf{B = f(x)}$ dado que por definición la función **f** es biyectiva. De esto se deduce que si $\mathbf{x \in B}$ entonces

$$\mathbf{x \in f(x)} \text{ si y solo si } \mathbf{x \notin f(x)}$$

lo que es una contradicción que proviene de aceptar la existencia de **f.**

Si bien existen varias versiones de esta paradoja, se empleará aquí la que define el conjunto **A** como el de los hombres a los que afeita el barbero y que son exclusivamente aquellos que no se afeitan a sí mismo. El barbero es un hombre y si no se afeita a si mismo entonces pertenece al conjunto **A** y por lo tanto debe afeitarse a si mismo, ya que debe afeitarlo el barbero. Este resultado es un absurdo que proviene de asumir la definición por compresión de un conjunto de una manera completamente general. Formalmente

$$\mathbf{(\exists y)(\forall x)[x \in y \Leftrightarrow \varphi(x)]}$$

donde $\mathbf{\varphi(x)}$ es una fórmula (que en el ejemplo puesto es "no lo afeita el barbero") en la que la variable **y** no es libre debido a que se encuentra dentro del alcance de un cuantificador que la emplea. La paradoja de Russell se obtiene si se elige $\mathbf{\varphi(x) = \neg\,(x \in x) = x \notin x}$ ya que se resultaría $\mathbf{(\exists y)\,(\forall x)\,[x \in y \Leftrightarrow x \notin x]}$[19] de donde eligiendo $\mathbf{x = y}$ (ya que se verifica para todo x y por lo tanto para **x** igual a **y**) se deduce que $\mathbf{y \in y \Leftrightarrow y \notin y}$ lo que es un absurdo.

---

18. Se denota como **P(A)** al conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbf{A (\forall A)(\forall C)(C \in P(A) \Leftrightarrow C \subseteq A)}$ **y** como **Df y Rf** al dominio y rango respectivamente de una función.

19. Es importante recalcar la diferencia que existe entre $\mathbf{(\exists y)(\forall x)\,(\varphi(x))}$ y $\mathbf{(\exists x)(\forall y)(\varphi(x))}$. En el primer caso se dice que existe al menos un **y** tal que se cumple la propiedad φ para todo **x**, es decir que el **y** es valido para todo **x** en tanto que en el segundo cada **x** puede tener un **y** diferente. La inversa multiplicativa en lo números reales $\mathbf{\neq 0}$ establece $\mathbf{(\forall x)(\exists y)(xy=1)}$. Aquí el **y** depende del **x** que se elija, en tanto que la existencia de la unidad multiplicativa establece que $\mathbf{(\exists x)(\forall y)(xy=y)}$. Si el **x** fuera único se expresaría de la siguiente manera $\mathbf{(\exists! x)(\forall y)(xy=y)}$.

Este hecho hizo que varios matemáticos modificaran las hipótesis sobre las que estaba basada la teoría de conjuntos para evitar este tipo de paradojas.

Teoría axiomática de conjuntos

Con el fin de evitar las contradicciones encontradas en la teoría de conjuntos se establecieron una serie de axiomas que constituyen el cimiento de la teoría. Esta metodología establece las propiedades básicas que la entidad en estudio debe satisfacer y que son consideradas verdades que no requieren demostración. Una teoría axiomática es un modelo formal de una realidad que se quiere estudiar. Sus cimientos están constituidos por un conjunto de axiomas, que son aseveraciones referidas a los objetos que se estudian y a partir de las cuales se obtienen nuevas propiedades a las que se llega exclusivamente mediante la aplicación de las reglas del lenguaje formal de la lógica. Deben ser consistentes de manera tal que si se demuestra que una propiedad es verdadera empleando un conjunto de axiomas no debe ser posible, usando otros axiomas, demostrar su falsedad. En general se trata que sean mínimas lo que equivale a decir que ningún axioma pueda ser demostrado empleando los otros axiomas. A partir de ellos se deducen nuevas propiedades que reciben el nombre de teoremas. Como bien se dijo, los matemáticos demuestran formalmente cosas acerca de entidades que ni conocen ni les interesa saber qué son.

Lo ideal sería que los axiomas pudieran modelar las cosas conocidas intuitivamente y cuya axiomatización se pretende lograr y que permitan construir, por medio de la aplicación de las reglas formales de la lógica, todos los teoremas que establecen las propiedades derivadas de los axiomas. El primer objetivo se ha logrado con diversas teorías axiomáticas de conjuntos. El segundo es imposible de lograr como lo demuestra Kurt Gödel en sus trabajos sobre la incompletitud.

Si bien existen diversas bases axiomáticas como fundamento de la teoría de conjuntos, se empleará aquí la construida a partir de una serie de axiomas que se conocen como los axiomas de Zermelo-Fraenkel normalmente referida como **ZFC**[20] y que se enunciarán a continuación.

Axioma de la extensión. Define qué se entiende por conjuntos iguales y se puede expresar de la siguiente manera: Los conjuntos **A** y **B** son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos. Dicho en otras palabras establece que lo que caracteriza a un conjunto son sus elementos. Formalmente puede expresarse

$$\forall X \forall Y (\forall z (z \in X \Leftrightarrow z \in Y) \Rightarrow X = Y)$$

En palabras puede explicarse: "***Para todo X y para todo Y se cumple que para todo z si z pertenece a X si y solo si z pertenece a Y implica que X es igual a Y***"

Axioma del conjunto vacío. Establece la existencia del conjunto vacío, que se denota $\varnothing$, y que no contiene ningún miembro. En particular este axioma garantiza la existencia de al menos un conjunto.

---

20. La **C** se refiere a la incorporación del axioma de la elección o axioma de Zermelo

Axioma de la separación. En palabras se expresa que "si **φ(x)** es un fórmula válida y **X** es un conjunto entonces existe un conjunto **Y** cuyos elementos son aquellos de **X** que satisfacen la propiedad **φ(x)**". En otras palabras la función **φ(x)** particiona el conjunto **X** en dos subconjuntos. Uno, el **Y**, en el cual la evaluación de **φ(x)** da como resultado verdad y otro, su complemento con respecto a **X,** en donde el resultado de la evaluación de **φ(x)** es falsa.

Este axioma limita la definición de un conjunto por extensión que es lo que da origen a la paradoja de Russell.

Por aplicación de este axioma se puede demostrar que no existe el conjunto de todos los conjuntos.

Es de destacar que este axioma más que un axioma es un esquema axiomático que abarca muchos axiomas individuales, ya que para cada función **φ** diferente se obtiene un nuevo axioma.

Axioma de pares. Si **A** y **B** son conjuntos también lo es **{A, B},** es decir un conjunto que solo tiene como elementos **A** y **B.**

Axioma de la unión. Establece que dado un conjunto **A** existe un conjunto **B** que tiene como elementos todos los elementos de los elementos de **A**. Este conjunto se lo denota **$\cup$A.**

Este axioma, conjuntamente con el de pares, permite definir la unión de dos conjuntos. Si **X** e **Y** son conjuntos entonces existe **Z={X,Y}** por el teorema de pares y por tanto existe $W=\cup\{X,Y\}=\{z: z\in X \vee z\in Y\}=X\cup Y$

Axioma del conjunto potencia. "Si **X** es un conjunto entonces existe el conjunto de todos los subconjuntos de **X**". Este conjunto se lo nota **P(X)** y es de fundamental importancia en la teoría de los números transfinitos.

Axioma de regularidad. "Todo conjunto no vacío contiene un elemento con el que no comparte ningún elemento"

Si bien no resulta evidente de su definición, este axioma impide la existencia de un **a** tal que $a\in a$. De esta manera la relación establecida por la pertenencia tiene una propiedad análoga a la de las relaciones de orden.

Axioma del conjunto infinito. "Existe un conjunto que tiene infinitos elementos"

Axioma de reemplazo. Antes de definir este axioma es necesario definir qué se entiende por una función proposicional. Una fórmula de dos variables **φ(a,b)** se dirá que es una función proposicional si para todo conjunto **a** existe un único conjunto **b** tal que se verifique **φ(a,b).** Definido este concepto este axioma establece que "si **A** es un conjunto y **φ(a,b)** es una función proposicional entonces existe el conjunto de los elementos **b** tal que **φ(a,b)** se verifique para algún $a\in A$".

La idea intuitiva que subyace en este axioma es que dado un conjunto **A** y una función **f** cuyo dominio es **A**, existe un conjunto $f(A)=\{f(x):x\in A\}$.

Axioma de la elección. Este axioma merece un comentario mucho mas amplio porque no está aceptado por todos los matemáticos debido a las consecuencias que contra la intuición trae aparejado su uso. En una de sus múltiples formas equivalentes establece que "dado un conjunto de conjuntos siempre es posible formar un nuevo conjunto eligiendo un elemento de cada uno de ellos". Otra forma de enunciarlo sería que “si **A** es un conjunto de conjuntos no vacío, entonces existe una función **F** tal que **D(F)=A** y que para todo **x**$\in$ **A, F(x)**$\in$ **x**”.

Para conjuntos finitos este axioma es intuitivamente inmediato. Para algunos conjuntos infinitos también lo es. Las conocidas clases residuales dentro de los enteros son un ejemplo dentro de un conjunto infinito. Si se consideran los conjuntos de los números naturales tales que el resto de dividir por **p** sea igual, se obtiene una serie de conjuntos, llamados clases residuales, que no tienen elementos en común (en virtud del algoritmo de división de Euclides). Se puede elegir como “representante” de cada una de estas clases el número perteneciente a ella menor que **p**. Otro ejemplo se obtiene si se considera el conjunto de todos los subintervalos pertenecientes a **(0,1)** con una longitud mayor que 0. En este caso la función **F** puede ser la que asocia a cada subintervalo su punto medio. Pero si se considera la colección de todos los subconjuntos no vacíos de los números reales no existe una definición obvia de la función **F**.

La aplicación de este axioma da resultados que no son para nada intuitivos, tal como el teorema de Banach-Tarsky que se explicará más adelante. Este teorema es también conocido como la paradoja de Banach-Tarsky por lo intuitivamente absurdo de su conclusión.

Las consecuencias que se derivan de la aplicación de este axioma son enormes. Se mencionarán como ejemplo algunas de ellas

- Todo espacio vectorial tiene una base
- La unión enumerable de conjuntos enumerables es enumerable
- Existe un conjunto de números reales que no es medible en el sentido de Lebesgue[21]
- Todo orden parcial puede extenderse a un orden total
- Toda álgebra de Boole es isomórfica a un campo de conjuntos.

Una pregunta que cabría hacerse es si el conjunto de **10** axiomas **ZFC** es mínimo y consistente. Como ya se ha dicho, que el conjunto de axiomas sea mínimo significa que ninguno de ellos pueda ser demostrado como un teorema en base a los restantes. La consistencia es la imposibilidad de deducir como verdad una contradicción a partir de ellos. Este problema no está hasta el momento actual resuelto y parecería que fuera imposible hacerlo debido a las demostraciones de Gödel. En cuanto a la minimalidad de **ZFC** la respuesta es decididamente no. El axioma de pares, por ejemplo, puede obtenerse a partir de los axiomas del conjunto de reemplazo y del de potencia.

En lo que se refiere al axioma de la elección, en 1940 Gödel respondió la pregunta positivamente.

---

21. Henri León Lebesgue fue un famoso matemático francés nacido en Beauvais, Francia en 1875 y fallecido en París en 1941. Una de sus mayores contribuciones fue la generalización de la noción de integral establecida por Riemann y Stiljes por medio de la aplicación de la teoría de la medida.

Los principios de la Teoría de Cantor

La teoría desarrollada por Cantor se basa en una idea genial que evitó el tener que tratar de imaginar el infinito, cosa que, con la finitud de nuestro mundo y pensamiento, resulta imposible. El concibió separar los conjuntos en clases a las que identificó como números cardinales.

Para ello definió un concepto que juega un papel fundamental en su teoría y que es el de potencia o número cardinal de un conjunto **M**. Se usarán las palabras textuales de Cantor que decía:

> "***llamaremos potencia o número cardinal del conjunto M al concepto general que por medio de nuestra facultad activa del pensamiento resulta cuando se hace abstracción de la naturaleza de los elementos que le pertenecen y del orden en que están dados***" [22] .

Este concepto es básico para el desarrollo de la teoría de Cantor. En efecto al desnaturalizar los elementos de un conjunto solo su tamaño o cantidad de elementos es lo que importa y lo que lo diferencia de otros conjuntos. Todos aquellos que tengan el mismo tamaño son equivalentes. Es de hacer notar que de esta manera evita referirse a la cantidad de elementos ya que ello implicaría asociar un número como si fuera finito.

Se denotará el resultado de esta abstracción por medio de la expresión $\overline{\overline{M}}$. De esta manera se dirá que $\overline{\overline{M}}$ es el número cardinal del conjunto **M** pero no como el numero que representa la cantidad de elementos sino como la clase de todos los conjuntos que tienen la misma cantidad de elementos. Dado que cada elemento unitario de **M** se transforma en una "unidad" sin la naturaleza original del elemento,

> "***el número cardinal*** $\overline{\overline{M}}$ ***es un conjunto compuesto por unidades y este número tiene existencia en nuestra mente como una imagen intelectual o proyección del conjunto original M***".

Así, por ejemplo, si se llamara **C** al conjunto de asistentes a una conferencia, $\overline{\overline{C}}$ será el conjunto de unidades cada una de las cuales corresponde a cada uno de los asistentes pero sin una naturaleza específica. Si la cantidad de asistentes fuera finita e igual a **n**, entonces solo el conocimiento de **n** identificaría a $\overline{\overline{C}}$.

Es interesante recalcar que el número cardinal coincide con la cantidad de elementos de un conjunto cuando este es finito. Si no fuera finito la cantidad de elementos carecería de sentido pero el concepto de número cardinal seguiría siendo válido.

Uno de las grandes deficiencias del enfoque de Cantor es la vaguedad que conlleva de manera implícita el uso de un lenguaje natural para describir cosas formales. En este

---

22. De ahora en adelante cuando se transcriba en forma textual partes del trabajo de Cantor se lo escribirá en negrita con caracteres itálicos.

trabajo se seguirán métodos matemáticos más modernos y formales para el desarrollo de los principios básicos de la teoría. Sólo se incluyen aquí las definiciones originales de Cantor por ser ellas los cimientos de toda la teoría desarrollada y de una invalorable importancia histórica que refleja la genialidad de ese gran matemático.

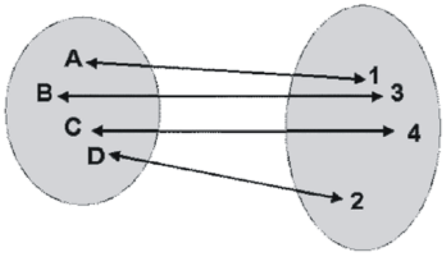
Equipotencia de conjuntos

Es el concepto fundamental de la teoría. Dos conjuntos serán ***equipotentes si y solo si existe una correspondencia 1 a 1 entre los elementos de uno en relación a los elementos del otro***. Formalmente la definición es:

1. $\mathbf{(A\approx B)_f}$ bajo la función **f** si y solo si **f** es una función **1** a **1** tal que $\mathbf{D(f)=A \wedge R(f)=B}$
2. $\mathbf{A\approx B}$ si y solo si existe una función **f** tal que $\mathbf{A\approx B}$ bajo **f**.

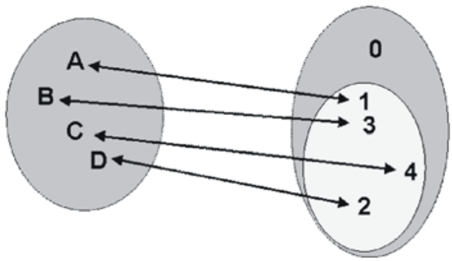
Es de hacer notar que esta parte de la definición establece que dos conjuntos son equipotentes si y sólo si existe al menos una función **f**.

Por ejemplo si $\mathbf{A_1=\{1, 3, 5\}}$ y $\mathbf{A_2=\{1, 7, 9\}}$ cualquiera de las siguientes funciones $\mathbf{f_1=\{\langle 1,1\rangle, \langle 3,7\rangle, \langle 5,9\rangle}$ y $\mathbf{f_2=\{\langle 1,7\rangle, \langle 3,9\rangle, \langle 5,1\rangle}$ satisface la definición previa dada.



En la figura se representa en forma gráfica los conjuntos **{A,B,C,D}** y **{1,2,3,4}** y una función biyectiva que relaciona los elementos de ambos. La doble flecha significa la relación **1** a **1** que existe entre sus elementos.

Supóngase que se deseara saber si la cantidad de asientos y personas en este salón son iguales. Se podría seguirel siguiente razonamiento: Si toda la gente esta sentada y hay sillas vacías, hay más sillas que personas. Si hay gente parada y todas las sillas están ocupadas hay más personas que sillas y si todas las sillas están ocupadas y no hay gente parada hay tantas sillas como personas. Es importante destacar que se ha comparado la cantidad de personas y de sillas sin tener necesidad de contarlas. Este método de comparación tan elemental podría ser el que emplean los niños que, aún si saber contar, son capaces de decidir quién tiene más caramelos, por ejemplo.



Resulta intuitivo establecer que dos conjuntos finitos son equipotentes si y sólo si tienen la misma cantidad de elementos. Es también intuitivo aceptar que si un conjunto finito es equipotente a un subconjunto propio de otro conjunto, luego ambos conjuntos no pueden ser equipotentes, como se representa en la figura. Sin embargo esta situación es completamente diferente en el caso de conjuntos infinitos. Si se consideran los números enteros positivos mayores que **0** (números naturales mayores que **0**) el conjunto de los pares es equipotente al de los naturales mayores que cero. En efecto la función **f=2n** permite establecer la equipotencia, ya que a todo **n** de le asocia un número par **2n**. Y dado cualquier par **p** se puede encontrar **p/2** como el natural correspondiente. Sin embargo el conjunto de los pares en un subconjunto propio de los naturales ya que el **3** pertenece a los naturales pero no pertenece a los pares (en realidad todos los impares, que son infinitos, pertenecen a los enteros pero no pertenecen a los pares). Esto contradice lo enunciado por Euclides en Los Elementos en donde en el postulado **8**[23] establece que "***el todo es mayor que las partes***". En efecto todos los enteros mayores que cero podrían considerarse formados por dos partes sin elementos en común entre sí: los números pares y los impares. Sin embargo, como se ha visto previamente, la cantidad de pares es igual a la de enteros mayores que cero. Lo mismo podría ser demostrado acerca de los números impares.

La relación de equipotencia es una relación de equivalencia[24]. En efecto las siguientes tres propiedades son fácilmente verificables

1. $\mathbf{A \approx A}$ (Propiedad reflexiva)
2. $\mathbf{A \approx B \Rightarrow B \approx A}$ (Propiedad simétrica)
3. $\mathbf{A \approx B \wedge B \approx C \Rightarrow A \approx C}$ (Propiedad transitiva)

Esta relación de equivalencia induce una partición en conjuntos que son equipotentes. Utilizando el axioma de la elección se puede definir un conjunto **K** que es el conjunto de todos los cardinales[25] .

Existen una serie de propiedades que se derivan de la relación de equipotencia que se enunciarán a continuación sin incluir su demostración

1. $\mathbf{A \approx B \wedge C \approx D \wedge A \cap C = \varnothing \wedge B \cap D = \varnothing \Rightarrow A \cup C \approx B \cup D}$
2. $\mathbf{A \approx B \wedge C \approx D \Rightarrow A \times C \approx B \times D}$
3. $\mathbf{A \times B \approx B \times A}$
4. $\mathbf{A \times (B \times C) \approx (A \times B) \times C}$
5. $\mathbf{A \times \{x\} \approx A \wedge \{x\} \times A \approx A}$
6. $\mathbf{(\forall A)\ (\forall B)\ (\exists C)\ (\exists D)\ (A \approx C \wedge B \approx D \wedge C \cap D = \varnothing)}$
7. Si se define $\mathbf{Y^X}$ como el conjunto de todas las funciones de $\mathbf{f{:}X \rightarrow Y}$ tal que $\mathbf{D(f)=X}$ **y** $\mathbf{R(f) \subseteq Y}$ se puede demostrar que
8. $\mathbf{A \approx B \wedge C \approx D \Rightarrow A^C \approx B^D}$
9. $\mathbf{B \cap C = \varnothing \Rightarrow A^{B \cup C} \approx A^B \times A^C}$
10. $\mathbf{(A \times B)^C \approx A^C \times B^C}$
11. $\mathbf{(A^B)^C = A^{B \times C}}$

---

23. O la quinta noción común según otros autores

24. Una relación recibe el nombre de equivalencia si satisface las siguientes tres propiedades: Reflexividad, simetría y transitividad. Puede ser considerada como una generalización del concepto de igualdad.

25. Como se verá posteriormente este conjunto no existe porque viola el axioma de regularidad. "Todo conjunto no vacío contiene un elemento con el que no comparte ningún elemento"

12. Si se define el conjunto **$2 = \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$,** es decir como un conjunto que tiene dos elementos entonces **$P(A) \approx 2^A$**. Es decir que el conjunto de todos los subconjuntos de **A** es equipotente al conjunto de todas las funciones **f** que existen de **$A \to 2$** donde **$Df = A$ y $Rf \subseteq 2$.** Dada la importancia de este teorema se incluirá la demostración.

Sea **$B \in P(A)$.** Entonces existe la función **$g_B \in 2^A$** tal que

$g_B(x) = \varnothing \Leftrightarrow x \in B$ y
$g_B(x)=\{\varnothing\} \Leftrightarrow x \in A \sim B$

Para cada **B** corresponde una única función **g_B** y por cada **$h \in 2^A$** existe un solo subconjunto **B** tal que **$h=g_B$** lo que establece la correspondencia entre **2^A** y **$P(A)$.**

Relación de menor o igual

Se definirá de la siguiente manera una relación que se llamará de menor o igual entre conjuntos y que se notará $\leq$:

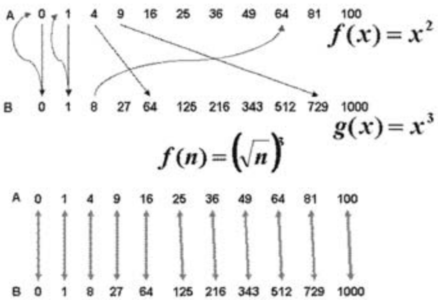
Dos conjuntos **A** y **B** están en la relación $\leq$ si y solo si existe un subconjunto **C** de **B** tal que **$A \approx C$.** De la definición surgen rápidamente las siguientes propiedades. Formalmente esta definición puede expresarse: **$(\exists C)((A \approx C \wedge C \subseteq B) \Leftrightarrow A \leq B)$.** Alguna de las propiedades son:

- **$A \approx B \Rightarrow A \leq B$**
- **$A \subseteq B \Rightarrow A \leq B$**
- **$A \leq B \wedge B \leq C \Rightarrow A \leq C$**

El teorema de Cantor-Shröder-Bernstein

Un teorema menos intuitivo pero fundamental para la teoría de los números transfinitos de Cantor es el demostrado por Schröder-Bernstein[26] que establece que

$A \leq B \wedge B \leq A \Rightarrow A \approx B$



Si bien la demostración rigurosa de este teorema no es excesivamente dificultosa escapa al objetivo del presente trabajo. Sin embargo se incluirá una demostración debida a Joe Hurd del Magdalen College, Oxford University.

Antes de encarar la demostración formal se desarrollará un ejemplo que

26. Algunos autores lo llaman el teorema de Schröeder-Bernstein. Sin embargo en este trabajo lo llamaremos teorema de Cantor-Schröeder-Bernstein en justicia a la genialidad de Cantor.

aclarará el enunciado del teorema. En la figura se han representado dos conjuntos **A** y **B** cuyos elementos son los cuadrados y los cubos respectivamente de los números naturales y dos funciones una que es **f(n)=n²** **(B→A)** y otra **g(n)=n³ (A→B)**. Se ve claramente que la función **n²** de **B** en **A** es inyectiva ya que no existe ningún número entero tal que el cuadrado de su cubo sea **25**. De manera similar se puede verificar que la función **n³** de **A** en **B** es inyectiva ya que no existe ningún entero tal que el cubo de su cuadrado sea **27**. En la parte inferior de la figura se muestra la función $\boldsymbol{h(n) = (\sqrt{n})^3}$ que es una biyección entre ambos conjuntos.

Se presentará otro ejemplo que aclarará aún más las ideas del método que se empleará para demostrar este teorema. Se desea demostrar que **[0,1]** $\approx$ **[0,1)** es decir que el intervalo $\mathbf{0 \leq x \leq 1}$ es equipotente con el intervalo semiabierto $\mathbf{0 \leq x < 1}$. Para ello es necesario demostrar que existe una función biyectiva entre ambos conjuntos. La construcción se hará en forma iterativa. Si se elige la función $\mathbf{f_0(x) = x}$ se ve que no satisface las condiciones requeridas para ser una función ya que $\mathbf{f_0(1)=1}$ no pertenece al rango que, por definición, no contiene el punto **1**. Para resolver este problema se modifica la función de la siguiente manera:

$$f_1(x) = \left\{ \begin{array}{c} x \leftrightarrow x \neq 1 \\ 1/2 \leftrightarrow x = 1 \end{array} \right\}$$

Con esta solución queda resuelto el problema anterior pero esta función presenta ahora el problema que tanto para **x =1** como para **x=1/2** la función vale **½**. Para solucionar este problema se modifica la definición de la siguiente manera

$$f_2(x) = \left\{ \begin{array}{l} x \ si \ x \notin \{1, 1/2\} \\ 1/2 \ \ si \ \ x \in \{1\} \\ 1/4 si \ x \in \{1/2\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x \ si \ x \notin \{1, 1/2\} \\ x/2 \ \ si \ \ x \in \{1, 1/2\} \end{array} \right\}$$

El problema ahora se traslado al punto **x = 1/4.** Para resolverlo defínase la nueva función

$$f_3(x) = \left\{ \begin{array}{l} x \ si \ x \notin \{1, 1/2.1/4\} \\ \dfrac{x}{2} \ si \ x \in \{1, 1/2.1/4\} \end{array} \right\}$$

El problema surge ahora en el punto **1/8** que corresponde a dos valores de **x** que son **x = 1/4** y **x = 1/8.** Continuando con este proceso, puede comprobarse que la función biyectiva será

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \left\{ \begin{array}{l} x \ si \ x \notin \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \ldots \right\} \\ \dfrac{x}{2} \ si \ x \in \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \ldots \right\} \end{array} \right\}$$

Antes de entrar en la demostración del teorema se demostrarán dos lemas que serán necesarios posteriormente

Lema 1: Sea **f** una función inyectiva que va del conjunto **N** en el subconjunto **M** de **N.** Sea el conjunto $\mathbf{Y} = \bigcup_{n \geq 0} \mathbf{f}^{n}(\mathbf{N})$ y sean **A** y **B** dos subconjuntos de **N.**

Entonces se verificará que $\mathbf{f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)}$.

Los pasos de la demostración son los siguientes:

$z \in f(A \cup B) \Leftrightarrow$	
$(\exists x)(x \in A \cup B \wedge z = f(x)) \Leftrightarrow$	Definición de función de un conjunto
$(\exists x)((x \in A \vee x \in B) \wedge z = f(x)) \Leftrightarrow$	Definición de unión
$(\exists x)((x \in A \wedge z = f(x)) \vee (x \in B \wedge z = f(x))) \Leftrightarrow$	Propiedad distributiva de and con or. La implicancia sería simple debido a que **x** es el mismo para ambos términos del or. Sin embargo si se tiene en cuenta que la función **f** es inyectiva y que **z** es único $(\exists x,y)((x \in A \wedge z = f(x)) \vee (y \in B \wedge z = f(y))) \Leftrightarrow$ $(\exists x)((x \in A \wedge z = f(x)) \vee (x \in B \wedge z = f(x)))$ ya que por ser **f** inyectiva $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$
$z \in f(A) \vee z\ A \in f(B) \Leftrightarrow$	Definición de función de un conjunto
$z \in f(A) \cup f(B)$	Definición de unión

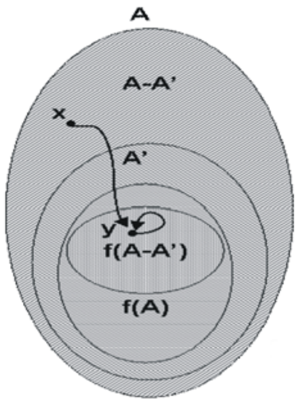
Con lo que queda demostrado que $\mathbf{f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)}$. Este resultado puede extenderse por inducción completa a $\mathbf{f}\left(\bigcup_{n \geq 0} \mathbf{A}_n\right) = \bigcup_{n \geq 0} \mathbf{f}(\mathbf{A}_n)$

Lema 2: Sean el conjunto **A** y el subconjunto $\mathbf{A' \subseteq A}$. Si existe una función inyectiva $\mathbf{f: A \rightarrow A'}$ entonces existe una función biyectiva $\mathbf{h: A \rightarrow A'}$.

El procedimiento de demostración de este lema es similar al empleado para la definición de la biyección entre **[0,1] y [0,1).**

Supóngase que se define la función **h** de la siguiente manera

$$h(x) = \left\{ \begin{array}{l} f(x) \Leftrightarrow x \in A - A' \\ x \Leftrightarrow x \notin A - A' \end{array} \right\}$$



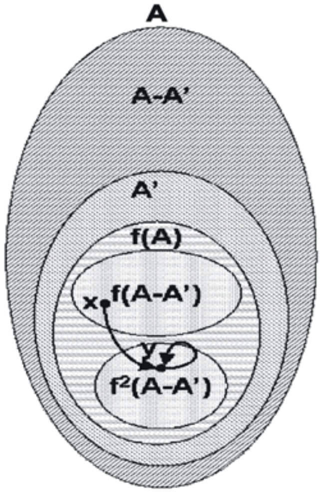
Con esta definición el problema surge con los puntos $\mathbf{y \in f(A-A')}$ dado que por no pertenecer **y** a **A-A'** la función debe ser $\mathbf{f(x) = x}$ por lo que el punto **y** es la imagen simultánea de $\mathbf{x \in A-A'}$ y de $\mathbf{y \in f(A-A')}$.

Para evitar este problema se modifica la definición de la función de la siguiente manera

$$h(x) = \left\{ \begin{array}{l} f(x) \Leftrightarrow x \in (A - A') \cup f(A - A') \\ x \Leftrightarrow x \notin (A - A') \cup f(A - A') \end{array} \right\}$$

Con esta modificación queda resuelto el problema del **y**$\in$ **f(A-A')** pero surge ahora un nuevo problema en un punto **y**$\in$ **f** ^{2}**(A-A')** que es imagen a la vez de **y** y de **f(x)** por las mismas razones que en el caso anterior**.**

Siguiendo esta misma línea de razonamiento se demostrará que la función **h(x)** definida de la siguiente manera



$$X = \bigcup_{n \geq 0} f^{n} (A - A')$$

donde f^{0} **(A - A') = A - A' y**

$$\mathbf{f^{n+1}(C) = f\left(f^{n}(C)\right)}$$

$$\mathbf{h(x)} = \begin{cases} \mathbf{f(x) \Leftrightarrow x \in X} \\ \mathbf{x \Leftrightarrow x \notin X} \end{cases}$$

es una biyección entre **A** y **A'.**

La función **h** es inyectiva.

Para demostrar esto hay que demostrar que **h(x)=h(y)**$\Rightarrow$**x=y**. Para ello es necesario analizar los siguientes tres casos: **x,y**$\in$ **X**, **x,y**$\notin$ **X** y **x**$\in$ **X**$\wedge$**y**$\notin$ **X**$\vee$**x**$\notin$ **X**$\wedge$**y**$\in$ **X**.

Caso 1: **x,y**$\in$ **X.** En este caso será **h=f** por la definición de **h**. Y dado que **f** en inyectiva será **h(x)=h(y)**$\Rightarrow$**f(x)=f(y)**$\Rightarrow$**x=y.**

Caso 2: x,y$\notin$ **X.** En este caso, por definición, será **h(x)=x**. Luego **h(x)=h(y)**$\Rightarrow$ **x=y**

Caso 3: x$\in$ **X**$\wedge$**f(x)**$\notin$ **X**$\vee$**x**$\notin$ **X**$\wedge$**f(x)**$\in$ **X.** Se demostrará que **x**$\in$ **X**$\Leftrightarrow$**f(x)**$\in$ **X.**

Si **x**$\in$ **X** entonces **h=f** por definición. Por lo tanto teniendo en cuenta la definición de **X** y el **Lema 1** demostrado anteriormente se puede deducir que

$$(A - B) \cup f(X) = (A - B) \cup f\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{n} (A - B)\right) = (A - B) \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{n+1} (A - B) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{n} (A - B) = X$$

De donde se deduce que **f(X)** $\subseteq$ **X** por lo que **f(x)**$\in$ **X,** con lo queda demostrado que **x**$\in$ **X**$\Rightarrow$**f(x)**$\in$ **X.**

Si **x**$\notin$ **X** entonces **h(x)=x** por definición y por lo tanto **h(x)**$\notin$ **X** con lo que queda demostrado que este caso no puede presentarse.

La función **h** es sobreyectiva:

Para ello es necesario demostrar que **(**$\forall$**y)(**$\exists$**x)(y=h(x))**.

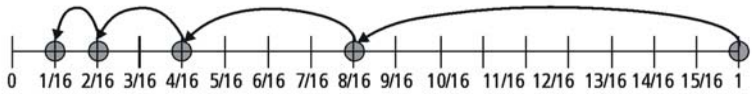
Caso 1: Supóngase que **y**$\in$ **X**.

Si **y**$\in$ **X** luego **(**$\exists$**n)(y**$\in$ **f**^{n}**(A-A'))** por definición de **X.** Entonces existe un **x**$\in$ **f** $^{n-1}$**(A-A')** $\subseteq$ **X** tal que **h(x)=f(x)=y**.

Caso 2: Si **y**$\notin$ **X**, luego **h(y)=y** por la definición de **h.**

Se vera otro ejemplo. Sea el conjunto de los naturales **A=N** y la función **f(x)=2x** que mapea los naturales en los pares **A'=P**. Por lo tanto **A-A'** será el conjunto de los números impares y $\mathbf{X} = \bigcup_{n \geq 0} \mathbf{f^n\,(A - A') = N = A}$ [27]. Por lo tanto la biyección **f(x)=2x.**

Se presentará otro ejemplo que corresponde con el dado anteriormente en forma intuitiva. En la figura adjunta se ve el diagrama del proceso. Se trata de encontrar una función biyectiva entre el intervalo cerrado **[0,1]** y el intervalo semiabierto **[0,1).** La función elegida ha sido **f(x)=x/2**. El conjunto **X** que se va construyendo por medio del mecanismo expuesto en la demostración del lema anterior es

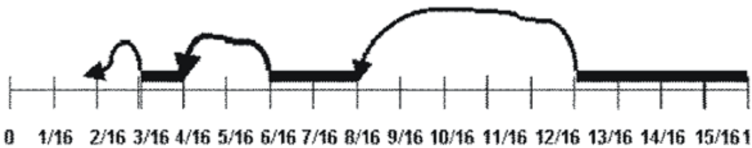


$$\mathbf{A = [0,1]}$$
$$A' = \mathbf{[0,1]}$$
$$f(x) = \frac{x}{\mathbf{2}}$$
$$\mathbf{A - A' = \{1\}}$$
$$\mathbf{f\,(A - A') = \left\{ \tfrac{1}{2} \right\}}$$
$$\mathbf{f^2\,(A - A') = \left\{ \tfrac{1}{2^2} \right\}}$$

....

$$\mathbf{f^n\,(A - A') = \left\{ \tfrac{1}{2^n} \right\}}$$
$$\mathbf{X} = \bigcup_{n \geq 0} f^n\,(A - A') = \left\{ \mathbf{x \,/\, x}\ \tfrac{1}{2^n} \wedge n \geq \mathbf{0} \right\}$$

Las flechas indican la forma de ir construyendo la bisección que es similar, como se verá posteriormente, al ejemplo del Hotel Infinito de Hilbert.



---

27. Para probar esto es necesario analizar los valores de **f^n(A-B)** que se incluyen en la siguiente tabla

1	3	5	…	A_B
2	6	10	….	$f\ (A - B)$
4	12	20	….	$f^2\ (A - B)$
…	…	…	….	….

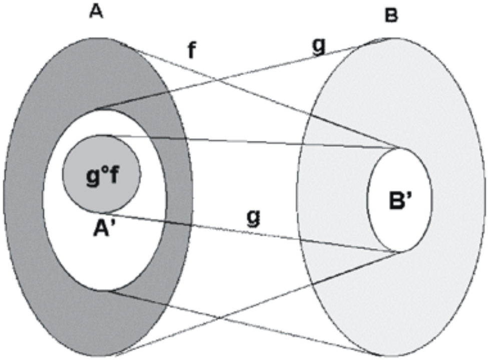
$$\mathbf{A - [0,1]}$$
$$A' = [0,\tfrac{3}{4}]$$
$$f(x) = \frac{x}{2}$$

$$\mathbf{A - A' = \{\tfrac{3}{4}, 1]}$$
$$\mathbf{f(A - A') = \{\tfrac{3}{8}, \tfrac{1}{2}]}$$
$$\mathbf{f^2(A - A') = \{\tfrac{3}{16}, \tfrac{1}{4}\}}$$
....
$$\mathbf{f^n(A - A') = \{\tfrac{3}{2^{n+2}}, \tfrac{1}{2^n}\}}$$
$$\mathbf{X = \bigcup_{n \geq 0} \{\tfrac{3}{2^{n+2}}, \tfrac{1}{2^n}\}}$$

En el último ejemplo se analizará el caso en el que la función inyectiva vaya desde **[0,1]** en **[0,3/4]**. En el gráfico adjunto se incluyen los conjuntos que se obtienen de aplicar sucesivamente la función **f** al conjunto

A-A'= (3/4,1]

Las flechas indican la forma en que se construye la biyección.



Para demostrar el teorema de Cantor-Schröeder-Bernstein que establece que

$\mathbf{A \leq B \wedge B \leq A \Rightarrow A \approx B}$

es necesario probar que si existen dos funciones inyectivas **f:A→B'⊆B** y **g:B→A'⊆A** entonces existe una función biyectiva **h:A↔B.**

1. Dado que **f** y **g** son funciones inyectivas **g°f** [28] será una función inyectiva que va de **A** en **A'=g(B).** Pero **g(B)⊆A** por lo que, empleando el lema anterior, debe existir una función biyectiva
   h:A↔g(B)=A'
2. Por hipótesis la función **g** es inyectiva de **B** en **A**, Por lo tanto **g** es biyectiva de **B** en **A'= g(B)**. Pero la inversa $\mathbf{g^{-1}}$ de una función biyectiva existe y es una función biyectiva $\mathbf{g^{-1}}$**:g(B)↔B.**
3. La composición de dos biyecciones es una biyección por lo tanto existe una función biyectiva $\mathbf{g^{-1}\circ h}$**:A↔B**, con lo que queda demostrado el teorema.

Otros teoremas de gran importancia en la teoría de los números transfinitos son los siguientes

Si **A≤B** ∧ **C≤D** entonces:

28. La notación **g°f** representa la composición de dos funciones **g(f(x))=(g°f)(x)**

1. $\mathbf{B \cap D = \varnothing \Rightarrow A \cup C \leq B \cup D}$
2. $\mathbf{A \times C \leq B \times D}$
3. $\mathbf{A^C \leq B^D}$ si y solo si es falso que $\mathbf{A=B=C=\varnothing \wedge D \neq \varnothing}$
4. $\mathbf{A \leq A \cup B}$

La siguiente es una definición equivalente a la relación menor entre los números: $\mathbf{A<B \Leftrightarrow A \leq B \wedge \neg(B \leq A)}$. De la definición se obtienen las siguientes propiedades

1. $\mathbf{\neg(A<A)}$ (Antireflexiva)
2. $\mathbf{A<B \Rightarrow \neg(B<A)}$ (Antisimétrica)
3. $\mathbf{A<B \wedge B<C \Rightarrow A<C}$ (Transitiva)
4. $\mathbf{A \leq B \Rightarrow \neg B<A}$
5. $\mathbf{A \leq B \wedge B<C \Rightarrow A<C}$
6. $\mathbf{A<B \wedge B \leq C \Rightarrow A<C}$
7. $\mathbf{A \leq B \Leftrightarrow A \approx B \vee A<B}$

Se demostrará ahora el teorema de Cantor que establece que $\mathbf{A<P(A)}$.

Para demostrar que $\mathbf{A \leq P(A)}$ se debe encontrar una función que mapee cada elemento de **A** en un subconjunto de **A**. Esta función es $\mathbf{f(x)=\{x\}}$ que asocia a cada elemento de **x** de **A** el subconjunto de **A** que solo contiene **x.**

Supóngase que sea $\mathbf{A \approx P(A)}$ bajo la función $\mathbf{g:A \leftrightarrow P(A)}$donde $\mathbf{Dg=A}$ y $\mathbf{Rg=P(A)}$. Defínase el conjunto **B** de la siguiente manera $\mathbf{B=\{y:y \in A \wedge y \notin g(y)\}}$, es decir que el conjunto **B** esta formado por todos aquellos elementos de **A** que no pertenecen a su imagen por la aplicación de la función **g**. Pero en base a la hipótesis de la existencia de **g** se debe verificar que $\mathbf{(\exists x)(B=g(x))}$ de donde se deduce que $\mathbf{x \in g(x) \Leftrightarrow x \notin g(x)}$ Por lo tanto la función **g** no puede existir.

Una de las propiedades más importantes de de las relaciones definidas entre los conjuntos es la llamada ley de tricotomía que establece que $\mathbf{A<B}$**,** $\mathbf{A \approx B}$ o $\mathbf{B<A}$**.**

Conjuntos Finitos

¿Qué es un conjunto finito? Parece una pregunta fácil de responder. El sentido común dice que un conjunto es finito si tiene exactamente **n** elementos donde **n** es un número entero no negativo. Y ¿Qué es un conjunto infinito? La respuesta parece también sencilla: Si no es finito entonces es infinito. Por ejemplo se puede afirmar que la cantidad de hormigas vivas el 3 de enero de 1870 en el África es una cantidad finita, aun cuando no se sepa ni se pueda saber jamás cual es la cantidad real. Esta definición intuitiva es correcta y se puede emplear en el lenguaje corriente pero hace referencia a números y por lo tanto no resuelve el problema de la existencia de un infinito actual. Es por ello que es necesario establecer una definición que sea independiente de la noción de número. Existen varias definiciones de infinito entre las que se pueden mencionar las de Dedekind, Zermelo, Russell, Sierpinsky, Kuratowski, y Tarsky que no hacen referencia específica a ningún número.

Se mencionará primeramente la definición de Dedekind ya que su enunciado requiere menos conocimientos de tecnología matemática. En ella se establece que un conjunto es finito si y solo si no tiene subconjuntos propios con los cuales es equipotente. Formalmente será

$$(\forall \mathbf{A})(\mathbf{A}\ \textbf{es finito})(\forall \mathbf{B})\ (\mathbf{B} \subset \mathbf{A} \wedge \neg(\mathbf{B} \approx \mathbf{A}))$$

Un conjunto será infinito si y solo si no es finito.

Otra definición, debida originalmente a Tarski, no requiere el concepto previo de equipotencia para su enunciación. La idea se basa en que un conjunto es finito cuando toda familia no vacía de sus subconjuntos tiene un miembro para el cual todos los demás miembros no son un subconjunto propio de él. Se define como elemento minimal de una familia de conjuntos **A** un elemento $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ y para todo **B** si $\mathbf{B} \in \mathbf{A}$ entonces **B** no está incluido estrictamente en **x**. Un conjunto será finito si y solo si toda familia no vacía de subconjuntos tiene un elemento minimal. Por ejemplo si se define el conjunto **A={2,5,c}** la familia **{{2},{5},{5,c}}** tiene como elementos minimales los conjuntos **{2}** y **{5}** porque son los únicos que no contienen estrictamente ningún otro conjunto de la familia. El conjunto **{5,c}** no es minimal porque el conjunto **{5}** está contenido estrictamente en él.

Sea el conjunto **X={A,B}**. Los subconjuntos de **X** son ∅**,** **{A}**, **{B}**, **{A, B}** (Son cuatro subconjuntos ya que **4 =**$\mathbf{2^2}$**).**

En la tabla siguiente se han incluido todas las posibles familias no vacías de suconjuntos de X. Es de hacer notar que son **15** familias diferentes ya que la familia vacía no se considera.

Familia	*Elemento Minimal*
{∅}	∅
{{A}}	{A}
{{B}}	{B}
{A, B}}	{A},{B}
{∅,{A}}	∅
{∅,{B}}	∅
{∅,{A, B}}	∅
{{A},{B}}	{A},{B}
{{A},{A, B}}	{A}
{B,{A, B}}	{B}
{∅,{A},{B}}	∅
{∅,{A},{A, B}}	∅
{∅,{B},{A, B}}	∅
{{A},{B},{A, B}}	{A},{B}
{∅,{A},{B},{A, B}}	∅

En la segunda columna de la tabla se incluye, para cada familia, el elemento minimal. Es de hacer notar que los elementos minimales no incluyen estrictamente ningún otro elemento de la familia a la que pertenecen. Por lo tanto el conjunto **{A, B}** es finito.

Parecería un tanto innecesario complicar tanto una definición que, en principio, es intuitivamente evidente. Sin embargo esta definición sólo emplea la noción de inclusión y no requiere en ningún momento hacer referencia a los números ni al concepto de relación de dimensión.

Sea el conjunto **N** de los enteros positivos y considérese la familia de subconjuntos **F** definida de la siguiente manera:

$\mathbf{F=\{N_1, N_2,\ldots N_n,\ldots\}}$ donde cada uno de los subconjuntos $\mathbf{N_j}$ se define de la siguiente manera

$$\mathbf{N_j=N-\{1, 2, 3,..., j-1\}}$$

Empleando la definición anterior se obtiene

$\mathbf{N_1=N\text{-}\varnothing=N=,1, 2, 3,\ldots.\}}$

$\mathbf{N_2=N\text{-}\{1\}=\{2, 3, \ldots, j,\ldots\}}$

…………………………………………

$\mathbf{N_n=N\text{-}\{1, 2, \ldots, n -1\}=\{n, n+1, n+2,\ldots\}}$

De la definición surge que $\mathbf{N_n \subseteq N_j \Leftrightarrow n \geq j}$. Por lo tanto dado cualquier $\mathbf{N_j}$ siempre existirá un $\mathbf{N_n}$ que esté contenido en él.

En el caso del conjunto **[0,1]** de los reales puede demostrarse que la familia de subconjuntos **[0,1/x]** para $\mathbf{0 < x \leq 1}$ no tiene un elemento minimal. Por un razonamiento análogo al empleado en el caso anterior, esta familia no tiene un elemento minimal, ya que dado cualquier subconjunto correspondiente a un valor $\mathbf{x_1}$ siempre existirá otro conjunto contenido en él eligiendo un valor de $\mathbf{x_2}$ tal que $\mathbf{0 < x_2 < x_1}$. Es de hacer notar que el concepto de elemento minimal coincide con el de mínimo en el caso de los números enteros. Dado un conjunto de números enteros, el número de mínimo valor será aquel que no es mayor a ningún otro número del conjunto. La diferencia es que en la definición de conjunto minimal solo se emplea el concepto primitivo de inclusión de conjuntos.

A partir de esta definición es posible deducir una serie de propiedades de los conjuntos finitos. Solo se mencionarán aquí algunas de las principales propiedades. Algunas de ellas parecen obvias pero deben demostrarse en base a los axiomas **ZFC**

1. El conjunto vacío $\varnothing$ es finito
2. El conjunto **{x}** es finito
3. Si **A** es finito y $\mathbf{B \subseteq A}$ luego **B** es finito
4. Si **A** y **B** son finitos su intersección y diferencia son finitos
5. Si **A** y **B** son finitos luego su unión es finita.
6. Si **A** es finito entonces $\mathbf{A \cup \{x\}}$ es finito
7. Si un conjunto es finito su conjunto potencia es finito
8. Si **P(A)** es finito entonces **A** es finito
9. Si **A** es finito y $\mathbf{A \approx B}$ entonces **B** es finito
10. Si **A** es finito y $\mathbf{B \leq A}$ entonces **B** es finito
11. Si **A** es finito entonces $\mathbf{A<B}$, $\mathbf{A \approx B}$ o $\mathbf{B<A}$
12. Si **A** es finito y **B** no lo es entonces $\mathbf{A<B}$
13. Si **A** es finito y **B** es un subconjunto propio de **A** luego $\mathbf{B<A}$

Como se desprende las propiedades enunciadas en el párrafo anterior y que se demuestran a partir de la definición de finitud establecida previamente, las características de los conjuntos finitos coinciden con la idea intuitiva de finitud. Es importante recalcar que un conjunto es infinito si y solo sí no es finito y quedaría enunciada de la siguiente manera:

Un conjunto es infinito si y sólo si existe una familia de subconjuntos que no tenga elemento minimal.

Los números cardinales

La definición dada por Frege y Russell de un número cardinal es hermosa en su simplicidad. El número cardinal $\overline{\overline{A}}$ del conjunto **A** es la clase de equivalencia de todos los conjuntos equipotentes con él. Formalmente será

$$\overline{\overline{A}} = \{B : B \approx A\}$$

Cantor empleó la doble barra sobre la denominación de un conjunto para indicar dos niveles de abstracción. El primero de ellos era eliminar la naturaleza particular de los elementos que componen el conjunto y el segundo eliminar el orden.

Usando los conceptos anteriores se pueden definir los siguientes conjuntos

$\mathbf{0_f=\{\varnothing\}}$[29] es decir la clase de equivalencia de todos los conjuntos que no tienen elementos. La clase[30] de los conjuntos que tienen un solo elemento se puede definir de la siguiente manera

$$\mathbf{1_f=\{A: (\exists x)(x\in A \land (\forall y)(y\in A \Rightarrow x=y))\}}$$

Una definición equivalente es la siguiente $\mathbf{1_f= \{A : A\approx\{\varnothing\}\}}$. Similarmente se puede definir $\mathbf{2_f = \{A: A\approx\{\varnothing,\{\varnothing\}\}}$. Continuando con la definición puede definirse en general

$$\mathbf{N_f=\{A : A\approx\{\varnothing,(N\text{-}1)_f\}\}}$$

Alguien podría preguntarse ¿porqué complicar tanto algo que, en principio, parece ser extremadamente simple? Después de todo, concebir un conjunto que sólo tiene un elemento, o que tiene **n** elementos no parece ser una aventura del intelecto demasiado extravagante. Para responder a esta razonable observación, es necesario recalcar que la teoría de los números transfinitos es un resultado de la teoría de conjuntos y que para evitar las conocidas paradojas de Russell esta teoría debe desarrollarse en base a un cimiento axiomático y a la deducción de nuevas propiedades por medio de la aplicación formal de las leyes de la lógica y sin emplear la noción intuitiva de número ni los preconceptos a que conllevan el uso de las definiciones de un lenguaje natural que, generalmente, resultan ambiguas y poco precisas. De hacerlo así se llegaría a los mismos

29. El subscripto f se empleará para indicar que se sigue la discusión original de Frege y Russell.
30. La palabra clase se emplea para denotar una clase de equivalencia.

resultados obtenidos por los antiguos griegos sobre los infinitos potenciales y actuales. Para ello se ha establecido una estructura completamente formal cuya base son los axiomas de Zermelo y Frege a los que se ha agregado el axioma de la elección (**ZFC**). Sólo serán verdaderas aquellas sentencias que se puedan derivar de los axiomas empleando las reglas formales de la lógica.

En lo sucesivo se empleará para denotar el número cardinal de un conjunto **A** a la expresión **K(A)**. Por lo tanto el utilizar la doble barra sobre el símbolo que denota un conjunto es equivalente a utilizar **K** como nombre de una función que hace corresponder a cada conjunto un número cardinal. $\overline{\overline{A}} = \mathbf{K(A)}$.

Nótese que no se definirá qué es un número cardinal sino que se lo definirá por medio de la propiedad que establece $\mathbf{K(A)=K(B)\Leftrightarrow A\approx B}$. Basado sobre estos razonamientos se definirá un número cardinal de la siguiente manera

"x es un número cardinal si y solo si existe un conjunto A tal que K(A)=x"

Uno de los teoremas más importantes es el que asegura que dados dos números cardinales **m** y **n** siempre existen dos conjuntos disjuntos **A** y **B** tales que **m=K(A)** y **n=K(B)** que formalmente puede expresarse

$$(\forall m)(\forall n)(\exists A)(\exists B)(A\cap B=\varnothing\wedge K(A)=m\wedge K(B)=n)$$

Las operaciones aritméticas de cardinales

A partir del teorema anterior, y otros que no se incluyen aquí por estar fuera del alcance de este trabajo, se puede definir la suma de dos cardinales de la siguiente manera: **m+n=p** si y solo si existen conjuntos disjuntos **A** y **B** tal que **K(A)=m**, **K(B)=n** y **K(A∪B)=p.**

Formalmente puede expresarse

$$(\forall m)(\forall n)(\exists p)((\exists A)(\exists B)(A\cap B=\varnothing\wedge K(A)=m\wedge K(B)=n\wedge K(A\cup B)=p))$$

Puede demostrarse que la operación de suma así definida tiene las siguientes propiedades

1. Conmutativa es decir **m+n = n+m**
2. Asociativa **(m+n)+p = m+(n+p)**
3. Existencia de un elemento neutro $\mathbf{m+0_f= m}$

También se puede demostrar que para todo **m** y **n** existe un **p** y los conjuntos **A** y **B** tal que $\mathbf{K(A)=m\wedge K(B)=n\wedge K(A\times B)=k}$. Este teorema permite definir el producto de cardinales en base al producto cartesiano de conjuntos. Se define como producto p=mn si y solo si existe los conjuntos A y B tal que

$$\mathbf{K(A) = m\wedge K(B) = n\wedge K(B\times A) = k}$$

Sobre la base de las preopiedades del producto cartesiano de conjuntos se puede demostrar que el producto de cardinales tiene las siguientes propiedades

1. Conmutativa es decir **mn = nn**
2. Asociativa **(mn)p = m(np)**
3. Existencia de un elemento neutro $\mathbf{m1_f = m}$
4. Distributiva con respecto a la suma **m(n+p) = mn+mp**

Finalmente se empleará el conjunto $\mathbf{A^B}$ de todas las funciones de **B** en **A** como la base para definir la potenciación. El siguiente teorema asegura la existencia de la potencia: Para todo **m** y **n** existe un solo cardinal **p** tal que

$$\mathbf{K(A)= m \wedge K(B)= n \wedge K(A^B)=p}$$

Sobre la base de la existencia garantizada por el teorema anterior se define la potencia de la siguiente manera: Para todo **m** y **n** existe un y solo un **p** y los conjuntos **A** y **B** tal que $\mathbf{K(A)=m \wedge K(B)= n \wedge K(A^B)=p}$

Es posible demostrar las siguientes propiedades

1. $\mathbf{m^{n+p} = m^n m^p}$
2. $\mathbf{(mn)^p = m^p n^p}$
3. $\mathbf{(m^n)^p = m^{n\,p}}$
4. $\mathbf{m^1 = m}$
5. $\mathbf{m^0=1}$
6. Si $\mathbf{m \neq 0}$ entonces $\mathbf{0^m = 0}$

Los números Enteros, Racionales y Reales

Si se aplica los conceptos anteriores al caso de los números enteros se puede ver que existe un conjunto con un número cardinal mayor que el de los naturales denotado como $\aleph_0$ que es el conjunto de todos los subconjuntos de los números naturales. Pero este conjunto no es más que el conjunto de los puntos del intervalo **[0,1]**. A este nuevo cardinal se lo denota $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ y se lo conoce como el cardinal del continuo (**c**). La demostración rigurosa escapa al alcance de este trabajo.

Los números enteros cuya cardinalidad se define como $\aleph_0$ tienen propiedades interesantes. Se podría preguntar, por ejemplo ¿hay más números pares que enteros?. Dado que dentro de los enteros existen los impares se podría arriesgar la respuesta siguiente: hay más enteros que pares. Sin embargo si se emplea el criterio definido por Cantor para establecer la equivalencia de conjuntos se llega a la conclusión que existen la misma cantidad de enteros que de números pares dado que mediante la función $\mathbf{m = 2n}$ se hace corresponder un par a cada natural y un natural a cada par como lo muestra la tabla siguiente. Esta es una característica de los conjuntos infinitos. Existen subconjuntos propios que tienen la misma cardinalidad que el conjunto original. Esto contradice el pensamiento clásico de que el todos es mayor que sus partes.

Números enteros	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	....
Números Pares	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	....

¿Qué pasa si se analizan ahora los números racionales? Los números racionales se definen como pares ordenados de enteros a los que se les asigna el valor dado por el cociente de los mismos. Así, por ejemplo el número racional $\frac{2}{3}$ se equipara al número decimal periódico **0,666…** La pregunta es ¿Cuántos números racionales existen? También en este caso lo intuitivo sería responder: Hay más racionales que enteros. Sin embargo la respuesta es diferente.

Si los números racionales se disponen en una tabla como la que se indica es posible asignarle un número natural (entero mayor que cero) a cada número racional. Así los números asignados serán los indicados en la tabla siguiente:

	1	2	3	4	5
1	1/1	2/1	3/1	4/1	5/1
2	1/2	2/2	3/2	4/2	5/2
3	1/3	2/3	3/3	4/3	5/3
4	1/4	2/4	3/4	4/4	5/4
5	1/5	2/5	3/5	4/5	5/5

A este método de enumeración se lo conoce como diagonalización.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1/1	2/1	1/2	2/2	3/1	4/1	3/2	2/3	1/4	1/5

Otra demostración más elegante para definir una función entre los pares ordenados de naturales y los naturales es la siguiente **$f(p,q)=2^p3^q$** Dada la unicidad de la descomposición de un entero en sus factores primos puede asignarse a cada racional un número natural por medio de la función anterior. Así, por ejemplo, al número racional **9/5** se le asocia el natural **$2^9 3^5$=124416.**

Ya se ha visto que los números enteros son infinitos y que existen tantos números racionales de la forma **p/q** como existen números enteros. La cantidad de números enteros o racionales recibe el nombre de infinito enumerable y se lo denomina $\aleph_0$[31] (Aleph cero). Estos números han recibito el nombre de transfinitos.

Una pregunta natural de hacerse es si existe otro número transfinito que sea mayor que $\aleph_0$, es decir si existe un conjunto con una cantidad de elementos tal que no se pueda encontrar una correspondencia biunívoca entre sus elementos y los números naturales o, de otra forma, que no se puedan numerar los elementos de dicho conjunto. Se dirá que un tal conjunto tiene una cantidad de elementos no enumerables o, por extensión, que el conjunto es no enumerable.

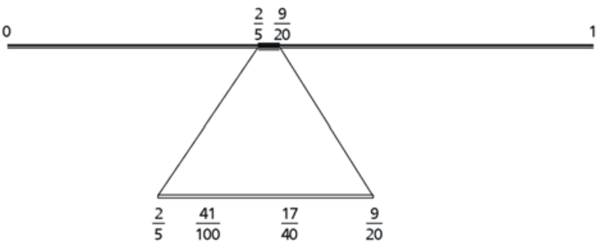
Considérese, ahora, los puntos del intervalo **[0,1]**, es decir todos aquellos números que son mayores o iguales que **0** y menores o iguales que **1**. Si estos números fueran contables o enumerables, es decir si hubiera tantos números en el intervalo **[0,1]** como enteros hay, sería posible asignarle un número entero a cada número entre **0** y **1** y a cada entero un número dentro del intervalo **[0,1]**. Recordemos que la igualdad de la cardinalidad de dos conjuntos se define en base a la existencia de una correspondencia biunívoca entre los elementos de ambos conjuntos.

Si se representan los números del intervalo **[0,1]** como una secuencia de dígitos como se lo hace con los números decimales:

31. Aleph es la primera letra del alfabeto hebreo.

X_1=0,**1**384576587943738866…..
X_2=0,6**0**94620486749586634…..
X_3=0,45**9**0687564039474048…..
X_4=0,999**5**876743648576583…..
X_5=0,0102**0**74658967585959…..
X_6=0,12209**5**8600786940004…..
X_7=0,985670**9**438950697854…..
………………………………..

Si se construye un nuevo número tal que, para todas las posiciones decimales, difiera en la enésima posición decimal del número $\mathbf{X_n}$ este nuevo número no puede haber estado incluido en la lista debido a que, por lo menos, es diferente de cada uno de los números $\mathbf{X_n}$ de la lista en su posición enésima. En el ejemplo dado el número **0,3784309…** no puede encontrarse en la lista debido a que difiere de todos los números $\mathbf{X_n}$, al menos en el dígito de la posición **n**. Y esto es válido para todo **n**. Por lo tanto no es posible encontrar una correspondencia uno a uno entre los números naturales y los números dentro del intervalo **[0,1].** Esta demostración por el absurdo formulada por Cantor fue uno de los primeros ejemplos de teoremas no constructivitos en el sentido que no construyen una solución.



El comportamiento de los números racionales y, en general, el de los reales tiene una gran similitud a las propiedades caóticas de los fractales. En efecto ambos tienen la propiedad de ser autosimilares. Como se verá en un próximo ejemplo, los fractales son figuras que tienen la propiedad de que una pequeña porción de la misma tiene el mismo aspecto y propiedades que la figura entera. En el gráfico se representado un segmento de los reales que ve del número **0** al **1**. Un subconjunto de ese intervalo es el que va desde el valor $\frac{2}{5}$ hasta el valor $\frac{9}{20}$. Entre estos extremos existen infinitos racionales. Encontrarlos es fácil. El intervalo $\left[\frac{2}{5},\frac{9}{20}\right]$ puede rescribirse como $\left[\frac{800}{2000},\frac{900}{2000}\right]$[32] por lo que la sucesión de números $\frac{800}{2000},\frac{900}{2000},...,\frac{900}{2000}$ pertenece al intervalo $\left[\frac{2}{5},\frac{9}{20}\right]$. Por lo tanto existen en el intervalo 101 racionales con denominador

32. Sólo se multiplicó numerador y denominador por 400 en el primer extremo y por 100 en el último.

2000 Si se vuelve a repetir el mismo proceso multiplicando numerador y denominador de ambos extremos del intervalo por 1000 se obtiene que el mismo intervalo pueda expresarse $\left[\frac{80000}{200000}, \frac{90000}{200000}\right]$. Por lo tanto en el intervalo existirán 1001 racionales con denominador 2000000. Dado que este proceso puede repetirse en forma indefinida, se concluye que en el intervalo dado existen infinitos números racionales. Por lo tanto el comportamiento de una porción de los racionales es análogo al de todos los racionales. Propiedades análogas tienen los números reales.

Hay otro conjunto de números que se definen como las raíces de polinomios cuyos coeficientes son enteros. Puede demostrarse que este conjunto es también enumerable.

Como se desprende estos conjuntos contradicen el principio que el todo es mayor que las partes ya que cualquier subintervalo del intervalo **[0,1]** tiene la misma cantidad de puntos que el intervalo original.

Cabe ahora preguntarse ¿qué pasa con los puntos del plano? ¿Habrá más puntos en el plano que en una recta? Intuitivamente la respuesta parecería ser que hay más puntos en el plano que en una recta. Sin embargo nuevamente la intuición falla. La cantidad de puntos que hay en una recta es la misma que las del plano ($\Re^2$)[33] . Y es la misma que en el espacio ($\Re^3$). La demostración se hará sólo para el caso del plano. Pero es completamente similar para el espacio. Para demostrarlo basta con probar que existe una función biyectiva entre cada punto de la recta y un punto del plano. Es decir que dado un real siempre es posible asociarle dos reales que serán las coordenadas en el plano. Y que dado dos reales es posible encontrar el real que le corresponde. Supóngase que cada número real $\boldsymbol{r} \in$ **[0,1]** se escribe:

$$r = 0.r_1\ r_2\ r_3\ r_4\ ...$$

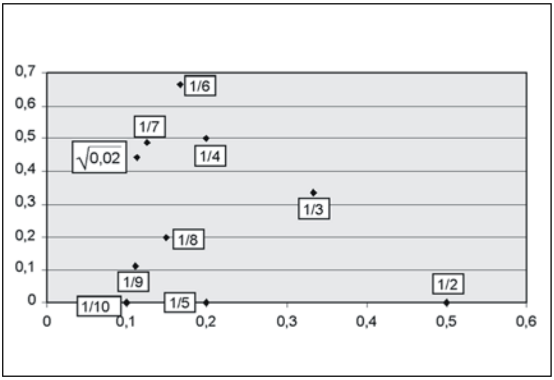
donde r_1, r_2, r_3, r_4 ,... son dígitos entre 0 y 9. Mediante esta escritura se puede representar cualquier número real en el intervalo **[0,1]**. Las coordenadas que se le asocian a dicho real son

$x = 0.r_1\ r_3 ...$ y $y = 0.r_2\ r_4 ...$

En el gráfico se han representado algunos ejemplos de la función antes definida. Es fácil demostrar que la función es biyectiva debido a la unicidad de su representación decimal.

Por lo tanto existen tantos puntos en el plano como puntos en una recta. Es decir que el intervalo **[0,1]** y un cuadrado de una unidad de lado tienen la misma cantidad de puntos. Para llevar esta demostración al espacio es necesario formar, a partir de la representación decimal, tres valores reales. Ello se logra formando a partir del primer número real tres nuevos números reales correspondientes a las tres coordenadas en el espacio de la siguiente manera:

33. El símbolo $\Re$ denota al conjunto de los números reales.



La primera coordenada estará compuesta por los dígitos decimales tal que el resto de dividir su orden por tres de 1,
La segunda coordenada estará compuesta por los dígitos decimales tal que el resto de dividir su orden por tres de 2 y la tercera coordenada estará compuesta por los dígitos decimales tal que el resto de dividir su orden por tres de 0.

Existe otra manera de demostrar que el continuo no es enumerable y que su cardinalidad es $\mathbf{2^{\aleph_0}}$. Cada número real puede representarse en la base **r** como una cadena infinita del tipo $\mathbf{0{,}d_1d_2d_3\ldots d_n\ldots}$ en donde $\mathbf{0 \leq d_j < r}$. En particular en la base binaria será **r = 2.** Todos los arreglos posibles de longitud infinita constituyen todas las funciones que se pueden definir de los naturales al conjunto **{1, 2, …, r}** es decir el conjunto $\mathbf{r^{\aleph_0}}$. Para bases binarias (**r=2**) se han representado dichas posibles funciones en la tabla adjunta.

1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	...
2	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	...
3	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	...
4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	...
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	...
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Pero si bien todo arreglo infinito de dígitos es un número real, existen diferentes arreglos que representan iguales números reales. En efecto el número **x=0,249999…** es igual a **x=0,250000…**. En efecto considérese el arreglo siguiente $\mathbf{0{,}d_1d2,\ldots,d_n,r\text{-}1,r\text{-}1,\ldots}$. El valor de este número real será

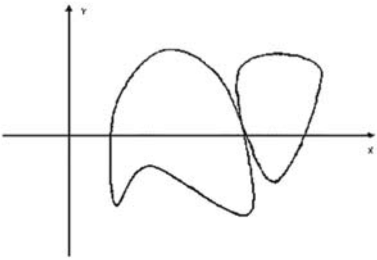
$$\mathbf{x=d_1r^{-1}+d_2r^{-2}+\ldots+d_nr^{-n}+(r-1)r^{-n-1}+(r-1)r^{-n-2}+\ldots}$$

donde $\mathbf{d_n \neq r-1}$. Esta expresión puede rescribirse de la siguiente manera

$$x=\sum_{j=1}^{n} d_j r^{-j} + (r-1)\sum_{k=1}^{\infty} r^{-n-k} = \sum_{j=1}^{n} d_j r^{-j} + (r-1)\mathrm{r}^{-n}\sum_{k=1}^{\infty} r^{-k}$$

Pero

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k} - 1 = \frac{1}{1-r^{-1}} - 1 = \frac{1}{r-1}$$



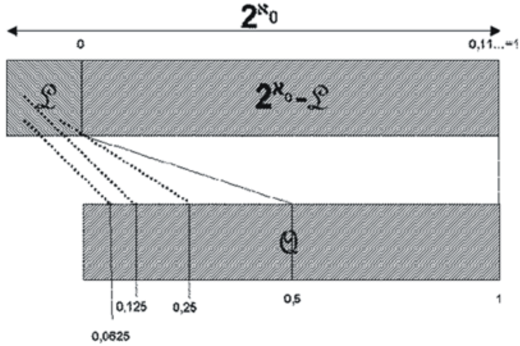
de donde reemplazando se obtiene finalmente

$$x=\sum_{j=1}^{n} d_j r^{-j} + r^{-n} = \sum_{j=1}^{n-1} d_j r^{-j} + (d_n+1)\,\mathrm{r}^{-n}$$

Si se representa **x** como un arreglo se obtiene

$$x=d_1d_2\ldots+(d_n+1)0\ldots$$

es decir que el arreglo **$0,d_1,d2,\ldots,d_n,r-1,r-1,\ldots$** y el **$x=d_1d_2\ldots+(d_n+1)0\ldots$** representan el mismo número real. El conjunto de los números de la forma **$0,d_1,d2,\ldots,d_n,r-1,r-1,\ldots$** es enumerable ya que para cada arreglo **$0,d_1,d2,\ldots,d_n$** (el resto de los dígitos no son necesarios ya que todos tienen el valor **r-1**) se le asigna el entero **$e_n=d_1r^{n-1}+\ldots+d_n$**. Sea **L** el conjunto enumerable de los arreglos de la forma **$0,d_1,d2,\ldots,d_n$**.



La función **y=0,5(1+x)** es una aplicación inyectiva de **$2^{\aleph_0}$-L** en **[0.5,1].** La función **$y=0.25*2^{-e_n}$** es una aplicación inyectiva de **L** en **(0,0.5).** Por lo tanto **$2^{\aleph_0}\leq$ Q**. Además la función **y = x** es una aplicación inyectiva de **Q** en **$2^{\aleph_0}$** por lo que **Q $\leq 2^{\aleph_0}$**. En la figura adjunta se representan las funciones antes definidas. Aplicando el teorema de Cantor-Shröeder-Berstein se deduce finalmente que $\approx$ **$2^{\aleph_0}$**.

Pero, ¿existen números transfinitos más grandes? La respuesta es que realmente existen más números transfinitos. Para ello basta analizar todas las posibles curvas que se pueden crear en el plano. En la figura se muestra un ejemplo. Esta curva se puede imaginarse como un subconjunto de todos los posibles pares ordenados de **X** e **Y** (pares del tipo **(x,y)**). ¿Cual será la cardinalidad de las posibles de curvas? Será la cardinalidad de todos los subconjuntos de los números reales cuya cardinalidad es **$\aleph_1$**. Por lo tanto la cardinalidad del conjunto de curvas es **$\aleph_2 = 2^{\aleph_1}$**. Más difícil sería imaginarse **$\aleph_3$, $\aleph_4$**,….Se tendría la misma dificultad que imaginar un espacio de n dimensiones.

La Hipótesis del continuo

Hasta ahora se han encontrado tres infinitos: El de los números naturales, el de los reales y el de las figuras en el plano. Cabe preguntarse ¿existirá un conjunto cuya cardinalidad sea mayor que la de los naturales y menor que la de los reales? La respuesta es que hasta ahora no ha sido encontrada por lo que esta proposición se la conoce como la hipótesis del continuo.

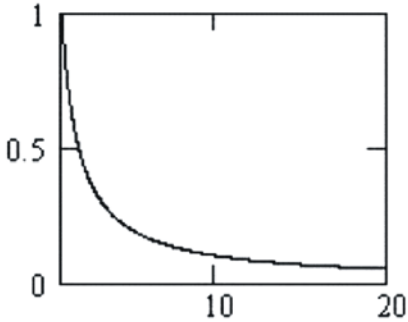
Pueden definirse números transfinitos mayores que **$\aleph_1$**. Por ejemplo la cantidad de funciones definidas sobre los reales **$\aleph_2 = 2^{\aleph_1}$**. Y así sucesivamente se podrían definir **$\aleph_3$**, **$\aleph_4$**,… y, en general **$\aleph_n = 2^{\aleph_{n-1}}$**

Algunas rarezas de los infinitos

La trompeta de Gabriel

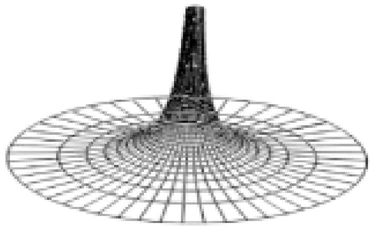
Hay otras rarezas del infinito. Supóngase que se define una función por medio de la siguiente expresión:

$$y = \frac{1}{x}$$

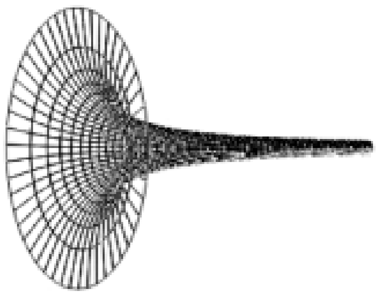


Esta ecuación se interpreta de la siguiente manera: para cada valor de **x**, el valor de **y** que se le asocia se calcula como el inverso multiplicativo del valor original de **x**. Así, por ejemplo, para **x = 2** el valor correspondiente de **y** será **0,5** en tanto que para **x =0,01** el valor de y será **100**. Es evidente que no existirá ningún valor para **x = 0** ya que es imposible dividir un número por cero. Si ello fuera posible existiría un número tal que, multiplicado por cero, daría un resultado diferente de cero (En matemáticas se dice que existen divisores del cero). Y ello es imposible ya que sumando cualquier cantidad de ceros el resultado siempre sería cero. El valor de **y** crece indefinidamente a medida que el valor de **x** se aproxima a cero. Y es aquí donde nos encontramos con un infinito potencial ya que es imposible construirlo en el mundo real. En el gráfico se representa la forma de la curva.

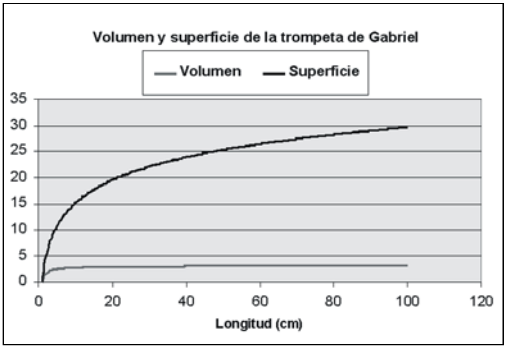
Si se hace rotar la hipérbola equilátera (así se llama este tipo de curva) definida en el párrafo anterior alrededor del eje vertical se obtendrá una superficie, llamada de revolución por los matemáticos, cuya apariencia es la que se muestra en la figura.



La forma que resulta recibe el nombre de la trompeta de Gabriel debido a su similitud con dicho instrumento que se ve mejor cuando se la representa horizontalmente.



Esta figura geométrica tendrá una superficie y un volumen. Y he aquí la rareza. Si bien su volumen es finito, su superficie será infinita.



En el gráfico se muestra la evolución de la superficie y el volumen. En tanto el volumen se va aproximando al valor **3,14159265** (El número **π**) la superficie crece más allá de todo límite. En efecto para una longitud de **10** centímetros, la superficie es de **15,18** centímetros cuadrados en tanto que el volumen por ella entornado es de **2,83** centímetros cúbicos. Para una longitud de **500** centímetros la superficie es de **39,76** centímetros cuadrados en tanto que el volumen es de **3,14** centímetros cúbicos.

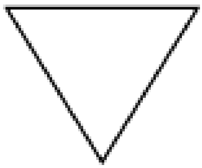
Aun más difícil resulta aceptar este experimento:

Supóngase que se dispone de un recipiente con **3,14159265** (**π**) centímetros cúbicos lleno de pintura. Con él se podría llenar la "trompeta". Pero sería insuficiente para pintar sus paredes, ya que, para poder realizar esta operación, se requerirían infinitos litros de pintura.

Es difícil de explicar este comportamiento. Quizá tan difícil como cuando Zenón de Elea imaginó las famosas paradojas de la flecha que nunca llega a su blanco o la de Aquiles que nunca podía alcanzar a la tortuga. Su conclusión fue que el movimiento no existía. Quizá sea que el concepto de volumen o superficie que empleamos cotidianamente difiere del concepto matemático de volumen o superficie que consiste en la suma de una infinitud de volúmenes o superficies pequeñas que cubren todo un cuerpo. Quizá lo más práctico sería suponer, similarmente a la posición de Zenón, que ni los volúmenes ni las superficies existen. Y que por lo tanto el universo no existe y es solo una ilusión nuestra.

El copo de nieve de Koch

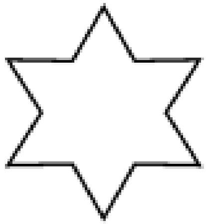
Pero estos extraños ejemplos no se acaban aquí. Existe una curva, llamada copo de nieve de Koch[34] que tiene un comportamiento aun más intrigante que la trompeta.



La construcción del copo de nieve se inicia con un triángulo equilátero tal como el que se representa en la figura. Se llamará **λ** a la longitud del lado, **L** al perímetro del mismo y **S** a su superficie. Dado que el triángulo es equilátero su perímetro será $\mathbf{L_1 = 3 \times \lambda}$. Puede demostrarse

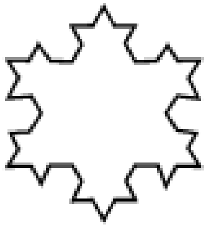
34. Niels Fabian Helge von Koch fue un matemático Sueco nacido en 1870. Creó esta famosa curva en 1906 que se llamó curva de Koch ("Une Méthode géométrique éleémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes plane") y fue una de las primeras curvas fractales estudiadas. Murió en 1924. Koch quería crear un ejemplo de una función continua no diferenciable. Recién en 1918 Gaston Julia descubrió el principio de los fractales. Pero fue recién en la década de 1970 con el advenimiento de las computadoras que se profundizó su conocimiento.

que la superficie será $\mathbf{S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}\, \lambda^2}$. A partir de esta figura inicial se van definiendo nuevas figuras de la siguiente manera:



Se divide cada lado en tres partes iguales y se reemplaza el segmento del medio por un triángulo equilátero cuyos lados son igual a un tercio del lado del original. De esta manera se obtiene una nueva figura cuya forma es la que se representa a continuación del triángulo inicial. Dada la forma en que se construyó la nueva figura tendrá **3×4** lados cada uno de los cuales tendrá una longitud de $\boldsymbol{\lambda_2 = \frac{\lambda}{3}}$ con lo que la longitud total de la figura será $\mathbf{L_2 = 3\,\frac{4}{3}\,\boldsymbol{\lambda} = 4\,\boldsymbol{\lambda}}$. La superficie de cada uno de los nuevos triángulos que se agregan será $\left(\frac{\lambda}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ con lo que la superficie total luego de este proceso será

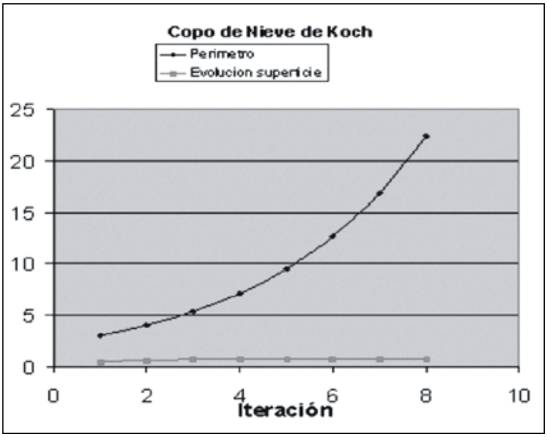
$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\lambda^2 + 3\,\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\lambda^2\left(1+\frac{1}{3}\right)$$

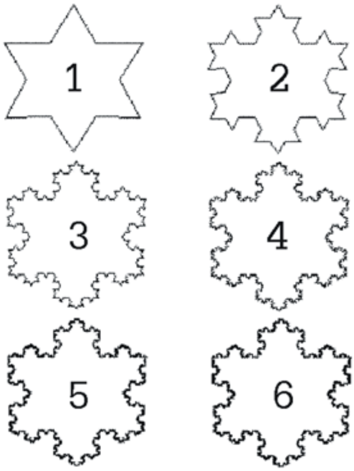


La próxima generación de la curva se obtendrá de una manera similar, dividiendo cada lado de la anterior por tres y reemplazando el segmento del centro por un triángulo equilátero. La nueva figura que resulta será la representada en el gráfico. La cantidad de lados será ahora $\mathbf{3 \times 4 \times 4 = 3 \times 4^2 = 48}$. La longitud de cada uno de sus lados será $\lambda_3 = \frac{\lambda}{9} = \frac{\lambda}{3^2}$. Por lo tanto la longitud total será $L_3 = 3 \times 4^2 \times \frac{\lambda}{3^2} = 3 \times \frac{4^2}{3^2} \times \lambda$. Para calcular el área se debe tener en cuenta que se agregan **48** nuevos triángulos de un lado igual a $\lambda_3 = \frac{\lambda}{3^2}$ lo que da un resultado de $3 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\lambda}{9}\right)^2$. El área total será $S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\lambda^2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}\right)$. Siguiendo este mismo procedimiento se puede mostrar que la iteración n-ésima dará por resultado una figura cuyo perímetro será $L_n = 3 \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \times \lambda$ y cuya superficie, para $\mathbf{n \geq 2}$ será:

$$S_n = \frac{\sqrt{3}\,\lambda^2}{4} \times \left[1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{3 \times 4^{j-1}}{9^{j}}\right]$$

Puede demostrarse que la expresión de la superficie se acerca indefinidamente a $\frac{2}{5}\sqrt{3}\,\lambda^2$ a medida que n crece. En forma diferente se comporta el perímetro del copo de nieve de Koch que crece indefinidamente dado que $\frac{4}{3}$ es un valor mayor que 1 por lo que sus potencias sucesivas crecen por encima de todo límite.





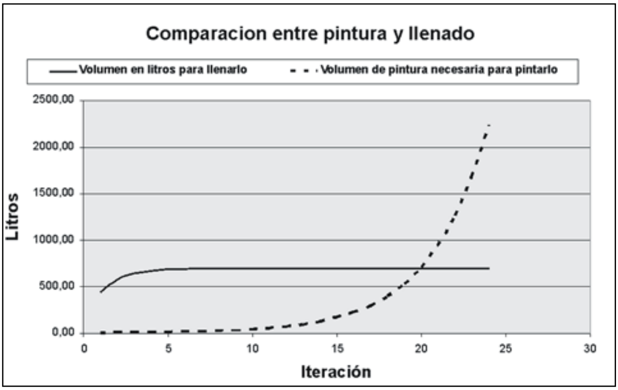
Este comportamiento es similar al de la trompeta de Gabriel ya que existe una figura de perímetro infinito pero de superficie finita. En la figura adjunta se muestra la evolución del perímetro y la superficie conjuntamente con la imagen de la figura para valores de n hasta 8[35].

En la figura anterior sólo se incluyeron las imágenes correspondientes hasta la sexta iteración. Debido que, como consecuencia de la resolución de las impresoras, las sucesivas iteraciones generan figuras que se confunden con la sexta iteración. En el gráfico de la derecha se puede observar como crece el perímetro en tanto que la superficie rápidamente alcanza el límite **0,69283032** (aproximación a $\frac{2}{5}\sqrt{3}$) , que es la superficie que se obtiene en el límite para un lado unitario.

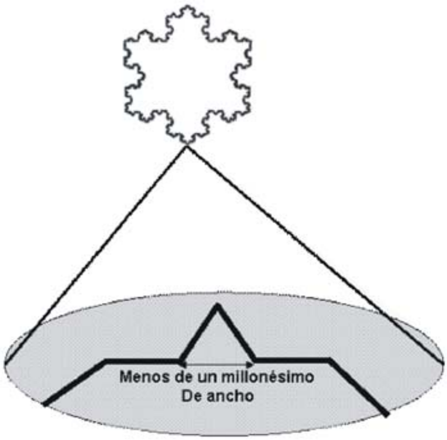
Si se formara un recipiente en el que la base fuera el copo de nieve de Koch a partir de un triángulo original de un metro de lado y de una altura de un metro, su volumen sería en el límite $\frac{2}{5}\sqrt{3} \times 1^2 = \mathbf{0{,}693}\ \boldsymbol{m}^{\mathbf{3}} = \mathbf{693}\ \textbf{\textit{litros}}$ y por lo tanto bastarían **693** litros de pintura para llenarlo. Sin embargo, si se quisiera pintar sus paredes, se requeriría una

35. Las figuras para valores mayores que 6 no se incluyeron debido a que no tienen casi diferencias para la resolución de la impresión.

cantidad infinita de pintura ya que el perímetro de la base del recipiente así formado tiende a infinito.

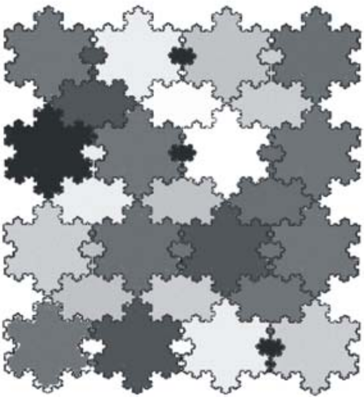


En el gráfico se muestra la evolución que, para las diferentes iteraciones, tiene la cantidad de pintura necesaria (en litros) para pintar y llenar el recipiente, suponiendo que la capa de pintura fuera de un milímetro de espesor. Se ve que hasta las **20** iteraciones la cantidad de litros para pintar es menor que la necesaria para llenarlo (para la iteración **20** se necesitan en ambos casos aproximadamente **700** litros de pintura). A partir de esa iteración los litros necesarios para pintar superan ampliamente a los necesarios para llenar el recipiente. Parecería fácil hacer una experiencia que refutara este resultado.



Hacer esta prueba no parece ser una fantasía abstracta de la mente sino que, construir un recipiente tal cual se lo ha definido, es un proyecto humanamente realizable que nada tiene que ver con el concepto de infinito. ¿Entonces, dónde está la causa de este resultado que atenta no sólo contra la intuición sino contra el sentido común? Para dilucidar este dilema se empleará un microscopio que permita observar la real estructura de estas líneas curvas que constituyen la el copo de nieve de Koch. Esto se representa en la figura adjunta. Se notará, entonces, que no se trata de una línea continua sino que es una sucesión de segmentos de recta (así fue construida) cada uno de los cuales forma con el contiguo un ángulo y que la longitud en la iteración vigésima es inferior a un millonésimo de milímetro. Es decir que el espesor de la capa de pintura es más de un millón de veces más grande que cada uno de estos segmentos. En realidad la pared del recipiente es rugosa y la medida del perímetro que se calcula es considerando los valles y las simas de esta rugosidad. No hay nada que atente al sentido común. Es solo un problema de dimensión. ¿Cual sería la superficie exterior de un vaso si se consideraran todas las rugosidades microscópicas que tiene el vidrio? Como bien se decía ¿cuál sería la longitud real de la costa de Inglaterra si se tienen en cuenta los accidentes microscópicos de la misma?

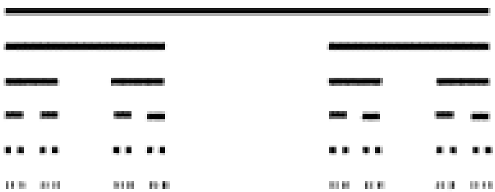
Pero no sólo los fractales tienen estas rarezas del infinito. También pueden ser una importante fuente de creatividad para el diseño como lo muestra la figura adjunta.



El razonamiento dado parece ser convincente. Sin embargo para realizar un análisis riguroso son necesarios más elementos de teoría. Hasta ahora lo que se ha presentado es una equivalencia entre una seria numérica (el perímetro para las diferentes generaciones de la curva y la superficie) y el proceso de suma de magnitudes físicas (longitud y superficie). En las series numéricas existe un cuerpo de teoría que permite definir formalmente la convergencia de las series y tu tendencia a límites definidos. Pero la rama de la matemática denominada topología[36] ha desarrollado una serie de conceptos que permiten establecer una analogía entre series de números y series de conjuntos.

El conjunto de Cantor

Otro ejemplo de un comportamiento extraño es el llamado **Conjunto de Cantor**. Para definirlo considérese inicialmente un segmento de longitud unitaria como se muestra en la figura. Si se divide en tres segmentos iguales y se elimina el segmento del medio sin remover sus extremos (Es decir el segmento que se elimina es un intervalo abierto) el conjunto que se obtiene es el que se encuentra en el segundo lugar. Si este proceso se continúa en forma recursiva con los segmentos que quedan (dividiendo cada uno de los segmentos que quedan en tres y eliminando el segmento abierto del medio) quedará un conjunto de números reales que tiene propiedades muy interesantes.

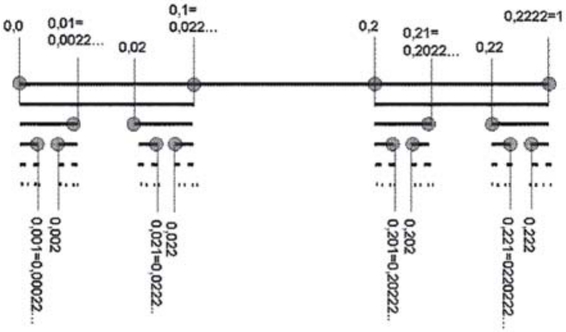


36. Estudia la naturaleza abstracta de continuidad y cercanía en espacios generalizados. Aspectos básicos son continuidad, dimensión, conpacticidad y conectividad.

En efecto se podría hacer la pregunta si después de este proceso ha quedado algo en el conjunto de puntos. La longitudes eliminadas serán **1/3** inicialmente, **2/9** la segunda vez, **4/27** la tercera vez y, en general, para la enésima vez la longitud eliminada será $\frac{2^n}{3^{n+1}}$. Si se suman todas las longitudes eliminadas se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

Dado que la longitud inicial era **1** los puntos que quedan tendrán una longitud cero. Sin embargo se puede demostrar que había tantos puntos en el segmento inicial como los hay en el conjunto final.



En el gráfico se han marcado los puntos que van quedando a medida que se eliminan los segmentos centrales (hasta la quinta iteración). Es de recalcar que los conjuntos que se eliminan son abiertos es decir que no contienen los puntos de los extremos. Por lo tanto los límites de los segmentos extraídos permanecen en el conjunto. En el gráfico se han destacado con un círculo (hasta la tercera iteración) los puntos que van quedando luego de las sucesivas extracciones y su valor, en base ternaria, se ha agregado al lado de cada uno[37].

Los valores han sido incluidos en la siguiente tabla ordenada por orden creciente. Los puntos suspensivos se emplean para indicar que los números de más a la derecha se repinten indefinidamente. Una primera observación es que solamente los puntos que quedan son aquellos que, en base terciaria, están compuestos por dígitos que son ceros o dos (no queda ningún número que contenga dentro de sus dígitos un uno). La pregunta responder es si es posible asignar a cada valor un número natural. La demostración de que no es posible es muy similar a la conocida con el nombre de diagonalización. Supóngase que existe. Construyamos un nuevo número de la siguiente manera:

37. Una base ternaria representa los números en la forma $\mathbf{x = a_1 3^{-1} + a_2\ 3^{-2} + \dots}$ que se denota $\mathbf{0.}\boldsymbol{a_1 a_2}\mathbf{\dots}$ donde las a valen 0, 1 o 2. El número 1/3 será 0,1=0,0222…

1	0,000000000000000...
2	0,000222222222222...
3	0,002000000000000...
4	0,002222222222222...
5	0,020000000000000...
6	0,020222222222222...
7	0,022000000000000...
8	0,022222222222222...
9	0,200000000000000...
10	0,200222222222222...
11	0,202000000000000...
12	0,202222222222222...
13	0,220000000000000...
14	0,220222222222222...
15	0,222000000000000...
16	0,222222222222222...

Si el primer decimal del primer número fuera **0** el primer decimal del nuevo número será **2** y si por el contrario si fuera **2** el primer decimal del nuevo número será **0**.

La regla general sería:

Si el enésimo decimal del enésimo número fuera **0**, el enésimo decimal del nuevo número será **2** y si por el contrario fuera **2,** el enésimo decimal del nuevo número será **0**. Claramente este nuevo número no puede estar en la lista inicial ya que, por lo menos, difiere en un dígito con cada uno de los valores incluidos en la tabla debido al método constructivo empleado. En el ejemplo dado el nuevo valor sería **0,2200202020202020** Por lo tanto la cantidad de puntos que quedan no es enumerable[38] y, sin embargo, su longitud es nula. Es decir que se ha construido un conjunto que tiene la misma cantidad de puntos que el continuo pero cuya longitud es nula. Otra curiosidad interesante es que el número $\frac{1}{4}$ **= 0,020202....** que no pertenece a uno de los extremos de los segmentos eliminados continúa en el conjunto ya que está formado solamente por ceros y dos. El resultado es sorprendente. Dado que los conjuntos eliminados eran abiertos y que sólo hay una cantidad enumerables de ellos su unión es por tanto abierta y por lo tanto su complemento, que es el conjunto de Cantor, es cerrado. Por lo tanto contiene todos los puntos de acumulación. Además cada punto del conjunto de Cantor es un punto acumulación dado que en el entorno de cada punto habrá una cantidad infinita de puntos pertenecientes al conjunto. Se ha construido un conjunto que tiene la misma cantidad de puntos que el intervalo **[0,1]** pero que tiene longitud cero. Estos hechos contradicen la intuición y el sentido común.

El infinito y el Universo

Se puede encontrar otros ejemplos de dimensiones que, aunque teóricamente finitas, resultan infinitas para cualquier ser que viva en nuestro Universo. Para ello se analizará el siguiente experimento:

Supóngase que se desea enumerar todas los posibles arreglos que, en una línea de 80 caracteres, se pueden formar con las letras del alfabeto latino, los dígitos de 0 a 9 y los caracteres especiales más comunes (Se consideraron **45** símbolos en total)[39]. Si

38. Como se verá después la cantidad de puntos del conjunto de Cantor es la misma que la cantidad de puntos del intervalo (0,1).

39. La cantidad de arreglos se expresa por la fórmula $\mathbf{45^{80} = 1{,}8 \times 10^{132}}$

todos los arreglos se escribieran en un papel tipo **A4** con caracteres comunes de una impresora y se formara con ellos una pila, la altura de la misma medida en kilómetros seria de un dos seguido de **125** ceros (**2** con **112** ceros años luz) lo que equivale a **1,2** seguido de **117** ceros veces la distancia entre la tierra y el sol. Pero el resultado es aún más sorprendente si se desea expresar esta magnitud en diámetros del universo[40] . La cifra que da es un uno con alrededor de **101** ceros cifra que luciría más o menos de la siguiente manera
1347000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000

Aunque se redujera la longitud de la línea a sólo **19** caracteres, la altura sería de **2** veces el diámetro del universo. Pero resulta aún más sorprendente el volumen que se requeriría para almacenar todos los papeles escritos. Requeriría un **1** con **52** ceros veces el volumen del universo que se representaría de la siguiente manera:
11800000000000000000000000000000000000000000000000000

Si esto parece ser sorprendente mucho más sería la cantidad de arreglos que se podría hacer si se considera un libro de **500** páginas conteniendo páginas de **60** líneas. Un tal libro tendría en total unas **2.000.000** de letras y símbolos con lo que la cantidad posible de arreglos sería $\mathbf{45}^{\mathbf{2.000.000}}$. El número resultante es un tres seguido de más de **3** millones de ceros. Sólo para escribirlo se necesitaría un libro de **750** páginas.

Como se puede apreciar para describir fenómenos sencillos puede llegar a necesitarse cifras que superan nuestra imaginación y que pueden llamarse potenciales factibles.

Los lenguajes y el infinito

Si se pregunta a alguien ¿qué es un lenguaje? su respuesta dependerá del punto de vista de quien responda. Si se va a las fuentes del idioma, como por ejemplo la 22ª edición del diccionario de la lengua española de la Real Academia Española, se encontrarán acepciones tales como:

- ***Conjunto de sonidos articulados con lo que el hombre manifiesta lo que piensa o siente***
- ***Manera de expresarse***
- ***Estilo y modo de hablar y de escribir de cada persona en particular***
- ***Uso del habla o facultad de hablar***
- ***Conjunto de señales que dan a entender algo***
- ***Conjunto de signos y reglas que permite la comunicación con un ordenador***

Estas definiciones pueden expresar muy bien lo que la palabra lenguaje en la vida corriente significa, pero son demasiado vagas cuando lo que se pretende es sentar las bases de una teoría formal de los lenguajes.

---

40. Se ha asumido un radio del Universo de 78.000.000.000 (setenta y ocho mil millones) de años luz según el resultado obtenido por la sonda Wilkinson de la Agencia Nacional Para la Aeronáutica y el espacio (NASA) en base al estudio de la Radiación Cósmica de Fondo
(http://news.bbc.co.uk/hi/spanish/science/newsid3758000/3758789.stm)

La definición de un lenguaje, desde un punto de vista formal, se basa en un concepto primitivo que es el alfabeto o, para ser más preciso, el diccionario de un lenguaje que es el conjunto de símbolos o palabras a partir de las cuales y por medio de combinación de ellas se crean los textos que constituyen los discursos que con dicho lenguaje se pueden crear. Este conjunto recibe el nombre de conjunto de terminales.

Son varios los ángulos desde los cuales se puede estudiar un lenguaje. Quitando aquellos referidos a aspectos estéticos, se puede mencionar: ortografía, sintaxis y semántica. El enfoque que se seguirá será su análisis desde el punto de vista sintáctico, que es la ***parte de la gramática que enseña a coordinar y unir las palabras para formar las oraciones y expresar conceptos***. Los aspectos ortográficos y semánticos escapan al objetivo de este trabajo y no serán considerados, sin que ello implique desconocer su importancia.

Este conjunto de palabras que conforman el diccionario de un lenguaje se denota generalmente con la letra griega Σ y, por definición, será considerado finito. Es decir se acepta que las palabras de un lenguaje no pueden ser infinitas. El conjunto de todas las posibles concatenaciones de elementos de Σ se denotará como Σ^***.** Un lenguaje **L** es un subconjunto de Σ^*, es decir que $\mathbf{L} \subseteq \Sigma^*$. Definir por extensión, es decir explicitando todos los textos que se pueden generar un lenguaje como, por ejemplo, el castellano, sería una tarea inhumana, no por el esfuerzo que ello implicaría, sino por la imposibilidad de almacenar los resultados en el Universo como ya se ha visto anteriormente. Otra forma de estudiar los lenguajes es el empleo de la estructura sintáctica de sus sentencias[41]. Para ello se definirá primero el concepto de gramática.

Es importante recordar que el objetivo que lleva a incluir aquí los conceptos básicos de la teoría formal de los lenguajes es el de determinar las posibilidades de las gramáticas formales para la descripción de lenguajes.

La definición formal de una gramática se la realiza por medio de un cuádruple $\mathbf{G=\langle\Sigma, N, P, S\rangle}$ donde

- $\boldsymbol{\Sigma}$ es el conjunto de palabras del lenguaje (las palabras del castellano por ejemplo), llamado también el conjunto de terminales,[42]
- **N** es el conjunto de entidades sintácticas del lenguaje (verbo, sustantivo, ..), llamado también el conjunto de no terminales (este conjunto no puede tener elementos en común con $\boldsymbol{\Sigma}$),
- **P** es un conjunto de reglas de reescritura que define la forma en que una cadena de terminales y no terminales (que por lo menos contiene un símbolo no terminal) puede ser reemplazada por otra cadena de terminales y no terminales (que puede contener solamente símbolos terminales) y

---

41. Este método es el empleado normalmente para la definición de lenguajes artificiales de programación.

42. El conjunto de terminales pueden ser elementos atómicos como por ejemplo las letras o bien compuestos por las palabras de un lenguaje. En general es este último criterio el que se usa en la práctica, diferenciándose de esta manera la ortografía (forma de escribir las palabras) de la sintaxis (forma de combinar las palabras).

- **S** es un símbolo especial perteneciente a **N** que recibe el nombre de símbolo inicial.

Para aclarar las ideas se considerará un ejemplo. Sea

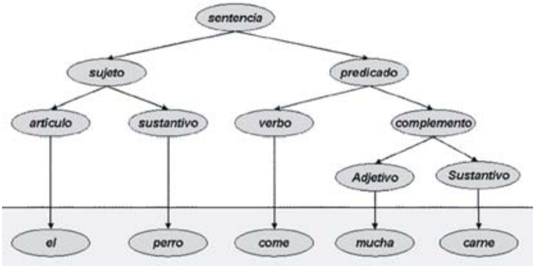
Σ = {el, perro, come, carne, mucha}
N = {*sentencia, verbo, sustantivo, artículo, adverbio, sujeto*}
P = {*sentencia*⇒*sujeto predicado*,
sujeto⇒*artículo sustantivo*,
artículo⇒**el**,
sustantivo⇒**perro**,
sustantivo⇒**carne**,
verbo⇒**come**,
adjetivo⇒**mucha**,
predicado⇒*verbo complemento*,
complemento⇒*adjetivo sustantivo*,}
S = *sentencia*

Los elementos de **N** han sido escritos en itálica para garantizar que este conjunto y el de los terminales, que se escriben en negrita, no tengan ningún elemento en común. La doble flecha (⇒) separa la parte izquierda de cada producción (que es lo que se reemplazará) de la parte derecha (que contiene el reemplazo).

La generación de una sentencia en esta gramática será como sigue:

sentencia⇒ *sujeto predicado*
⇒ *artículo sustantivo predicado*
⇒ **el** *sustantivo predicado*
⇒ **el perro** *predicado*
⇒ **el perro** *verbo complemento*
⇒ **el perro come** *complemento*
⇒ **el perro come** *adjetivo sustantivo*
⇒ **el perro come mucha** *sustantivo*
⇒ **el perro come mucha carne**

En la figura se representa el proceso de generación de una sentencia del lenguaje por medio de un árbol. Este árbol recibe el nombre de árbol sintáctico.



Como se desprende del ejemplo anterior una sentencia pertenece al lenguaje generado por una gramática si, partiendo del símbolo inicial y por medio del empleo de repetidas producciones se puede llegar a obtener una cadena que solo contiene palabras del diccionario es decir, terminales del lenguaje. El conjunto de las cadenas de terminales que pueden formarse con ese mecanismo recibe el nombre de lenguaje reconocido por la gramática y de lo denota **L(G)**.

Esta es una manera mucho más formal de definir un lenguaje. Pero una pregunta natural de realizarse es: ¿Es posible por medio de gramáticas tal cual se las ha definido representar todos los lenguajes que se pueden formar con un diccionario Σ? La respuesta es no. En efecto puede demostrarse que la cardinalidad de $\boldsymbol{\Sigma^*}$ es $\aleph_0$, es decir es enumerable[43] y por lo tanto la cardinalidad de todos los subconjuntos de $\boldsymbol{\Sigma^*}$ será $\aleph_1$. Es decir que la cantidad de lenguajes definidos con un subconjunto de $\boldsymbol{\Sigma^*}$ es equivalente a la del continuo (Los puntos de una recta). Por otro lado la cardinalidad de las gramáticas es $\aleph_0$[44]. Por lo tanto la cantidad de lenguajes que no se pueden describir con una gramática tiene la cardinalidad del continuo $\aleph_1$.

Se demostrará que la cardinalidad del conjunto de gramáticas es enumerable ($\aleph_0$) en tanto que la cardinalidad de lenguajes definidos sobre un conjunto $\boldsymbol{\Sigma}$ de terminales tiene la cardinalidad del continuo ($\aleph_1$). Dado un conjunto de símbolos terminales **Σ,** se define como la clausura transitiva o clausura de Kleene de **Σ,** que se denota **Σ*,** al conjunto de todas las posibles cadenas que se pueden formar con símbolos de **Σ** al que se agrega la palabra vacía $\boldsymbol{\lambda}$

Así, por ejemplo, si fuera **Σ={0,1}** su clausura sería

Σ*={λ,0,1,00,01,10,11,000,001,010,011,100,101,110,111,..}

Cuando no se desee incluir la palabra vacía, es decir cuando se desee representar el conjunto de todas las cadenas posibles de formar con **Σ,** se lo notará $\boldsymbol{\Sigma^+}$. De la definición surge que $\boldsymbol{\Sigma^*=\Sigma^+\cup\{\lambda\}}$

Se puede demostrar que la cardinalidad de Σ^* es $\aleph_0$. Un lenguaje sobre Σ se definirá como un subconjunto de Σ^*. El conjunto de todos los lenguajes definidos sobre Σ será, por lo tanto, el conjunto de todos los subconjuntos de Σ^* y se notará $\boldsymbol{\Lambda(\Sigma)=2^{\Sigma^*}}$. La cardinalidad de $\boldsymbol{\Lambda(\Sigma)}$ será, entonces, $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, que es la cardinalidad del continuo. Esto significa que existen tantos lenguajes como puntos tiene el intervalo **[0,1]**.

Para demostrar lo anterior se formalizarán los conceptos. Sea la gramática **G = <Σ, N, P, I>** en donde

- $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s\}$ es el conjunto de símbolos terminales de cardinalidad **s**
- $\mathbf{N} = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$ es el conjunto de no terminales de cardinalidad **n.**
- $\mathbf{P \subseteq (\Sigma\cup N)^*N(\Sigma\cup N)^* \times (\Sigma\cup N)^*}$ es el conjunto de objetos de la forma (α,β)[45] donde α es una cadena de terminales y no terminales que contiene al menos un no terminal y β es un conjunto de terminales y no terminales. Este conjunto

43. Dado que Σ es finito la demostración que Σ^* es enumerable se base en interpretar Σ como un conjunto de símbolos numéricos en la base cardinalidad de Σ. Cada elemento de Σ^* sería una cifra dentro de ese sistema numérico que se podría traducir en un número natural.

44. Puede demostrarse por un mecanismo similar a los números de Gödel basados en la descomposición de un número en sus factores primos.

45. Formalmente P es una relación definida en $\mathbf{(\Sigma\cup N)^*N(\Sigma\cup N)^* \times (\Sigma\cup N)^*}$

recibe el nombre de producciones o reglas de reescritura. Su interpretación es que cada ocurrencia de α puede ser reemplazada por β.

- $\mathbf{I} \in \mathbf{N}$ es el símbolo inicial.
- El conjunto de terminales y no terminales no tienen símbolos en común, es decir $\Sigma \cap N = \emptyset$

El lenguaje reconocido por la gramática **G** es el conjunto de cadenas de símbolos terminales que se obtiene a partir del símbolo inicial por la repetida aplicación de producciones y se lo denota **L(G).**

Es posible definir dos funciones biyectivas

$$\mathbf{f}: \Sigma \rightarrow \{1, 2, ..., s\} \text{ y}$$

$$\mathbf{g}: \mathbf{N} \rightarrow \{s + 1, s + 2, \ldots, s + n\}.$$

que mapean los conjuntos Σ y **N** sobre subconjuntos de los números naturales.

Estas funciones permiten reemplazar los terminales y los no terminales por números naturales garantizando, por su definición, que los nuevos conjuntos así formados no tengan elementos en común.

Si se definen los siguientes subconjuntos de los números naturales

$$T=[1,s]=\{1, 2, ..., s\} \text{ y}$$

$$\Psi=[s+1, s+n]=\{ s+1, s+2, \ldots, s+n\}$$

la gramática original puede reemplazarse por $<T, \Psi, \pi, \iota>$ en donde:

- π es el conjunto de producciones en el que los símbolos terminales y no terminales fueron reemplazados por números naturales mediante la aplicación de las funciones **f** y **g** y
- $\iota = \mathbf{g(I)}$

Esta nueva gramática reconocerá un lenguaje de números en los que cada terminal σ estará reemplazada por $\mathbf{f}(\sigma)$

Sin pérdida de generalidad se podría elegir **g** tal que $\mathbf{g(I)=s + 1}$. Sobre la base de estas consideraciones la gramática original podría ser reemplazada por la nueva

$$\mathbf{G' = <s, \pi>}$$

Donde queda sobreentendido que **s + 1** es el símbolo inicial y que todo símbolo mayor que **s** es un no terminal.

Puede demostrarse por inducción completa que

$$\sigma_{n1}\,\sigma_{n2}\,...\sigma_{n_d} \in L(G) \Leftrightarrow f\,(\sigma_{n1})\,f\,(\sigma_{n2})...\,f\,(\sigma_{n_d}) \in L(G')$$

El problema que se trata de resolver es como se asocia un número natural a cada gramática **G'**. Sean $(\alpha_j, \beta_j) \in \pi$ la producción j-ésima y sea

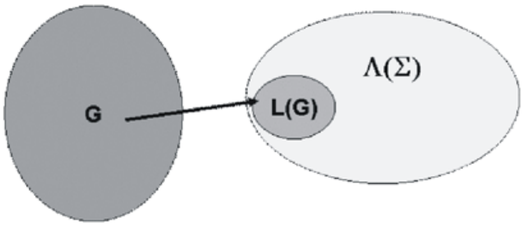
$$\alpha_j = x_1\, x_2 \ldots x_{n_j} \quad \text{y} \quad \beta_j = y_1\, y_2 \cdots y_{m_j}$$

donde $\mathbf{n}_j$ y $\mathbf{m}_j$ son la cantidad de símbolos de la parte izquierda y derecha de la producción **j** respectivamente. Defínanse los números naturales ζ_j y ξ_j de la siguiente manera:

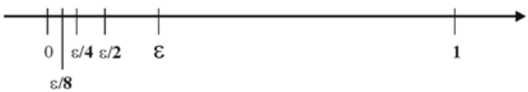
$\zeta_j = 2^{x_1} 3^{x_2} \ldots p_{nj}^{xn_j}$ y $\xi_j = 2^{y_1} 3^{y_2} \ldots p_{mj}^{ym_j}$ [46]

en donde $\mathbf{p_k}$ es el k-ésimo número primo. Por lo tanto a la j-ésima producción se le puede asignar el número natural $\boldsymbol{v_j = 2^{\zeta j} 3^{\xi j}}$ y al conjunto de las producciones se le puede asociar el número natural $\boldsymbol{w = 2^{v1} 3^{v2} \ldots p_t^{tn}}$ donde **t** es la cardinalidad de **P** (cantidad de producciones) por lo que a la gramática se le puede asociar el número natural $\boldsymbol{g = 2^s 3^w}$.

Este maping entre las gramáticas y los naturales es una función sobre. Existirán números naturales a los que no les corresponda ninguna gramática. Pero a todas las gramáticas les corresponde un número natural. Por otro lado, debido a que **w** depende de la elección de las funciones **f** y **g** y del orden que se le asignen a las producciones, gramáticas que, desde el punto de vista de la teoría de los lenguajes son consideradas iguales, se les asociarán diferentes números naturales. Debido a que la cardinalidad de las gramáticas no es finita se puede concluir que la cardinalidad de las gramáticas es $\aleph_0$, es decir que las gramáticas son enumerables**.** Debido a la unicidad de la descomposición de un número natural en sus factores primos puede demostrarse que este número es único y que el proceso de la obtención de la gramática a partir del número a ella asociado es también único. Como se ha demostrado la cardinalidad de las gramáticas es $\aleph_0$, es decir que hay tantas gramáticas como hay números naturales. Pero como se demostró anteriormente la cardinalidad de $\boldsymbol{\Lambda(\Sigma)}$ (lenguajes definibles sobre el alfabeto Σ) es la cantidad de subconjuntos que tiene Σ* (que es enumerable) por lo que la cardinalidad de $\boldsymbol{\Lambda(\Sigma)}$ es $\mathbf{2^{\aleph_0} = \aleph_1}$.



En la figura se representa este hecho. Pero es interesante recalcar que la cantidad de lenguajes imposible de describir por medio de gramáticas es infinitamente mayor que la de aquellos que pueden ser reconocidos por gramáticas formales. Para visualizar la relación que existe entre la cantidad de lenguajes y la de gramáticas, imagínese el intervalo **[0,1]** como se muestra en la figura y elíjase un numero real ε arbitrario. Si se asigna la primer gramática a **ε/2**, la segunda a **ε/4**, la tercera a **ε/8** y así sucesivamente se puede concluir que todas las gramáticas pueden acomodarse en el intervalo **(0,ε)** que tendrá una medida ε**.** Pero dado que ε es arbitrario, en el límite cuando tienda a **0**, la medida del intervalo será nula. Por eso en la jerga de la teoría de la medida se dirá que el conjunto de gramáticas es de medida nula.



46. Es de hacer notar que los conjuntos Σ**, N y P** no están ordenados en tanto que los valores de ξ y ζ dependen de los valores numéricos que les asigne por medio de las funciones **f** y **g.** Diferentes definiciones de estas funciones generan números ξ y ζ diferentes.

Para visualizar las magnitudes que los números **g** pueden tener se aplica lo expuesto anteriormente a un ejemplo. Sea la gramática **G = <Σ, N, P, S>** donde

Σ={a},

N={S} y

P={(S,a)}

Esta gramática reconoce sólo reconoce la cadena **a,** es decir **L(G)={a}.**

Sean las funciones **f** y **g** definidas por las siguientes tablas. Por lo tanto la gramática **G'** será **G'=<1,{(2,1)}>.** Los valores de α y β serán α_1**=2,** β_1**=1**. Sobre la base de estos valores se obtiene:

f	
a	1

g	
S	2

$\zeta_1 = 2^2 = 4,$

$\xi_1 = 2^1 = 2,$

$\nu_1 = 2^4 3^2 = 16*9 = 144$

$w = 2^{144} = 22300745198530623141535718272648361505980416 \approx 2{,}23*10^{43}$

$g = 2^1 3^{22300745198530623141535718272648361505980416}.$

Aun en este ejemplo minúsculo el número que resulta para **g** tiene alrededor de un **2** con **1.000.000.000.000.000** ceros. La conclusión es que este método no sirve para codificar las gramáticas, siendo su única utilidad demostrar que la cardinalidad de las gramáticas es $\aleph_0$.

¿Cuántos cuadros puede haber?

Se tratará de dar una definición formal de lo que es un cuadro, no desde el punto de vista artístico ni pictórico, sino desde el punto de vista de la teoría de conjuntos. Un cuadro es un subconjunto del plano representado por la tela u otro material en donde se encuentra pintado. Para cada punto **<x, y>** del plano se le asocian los siguientes datos: una textura que denominaremos **t** y un color que se representará con la letra **c.** La textura puede representarse por medio de un número real y podría ser la elevación que, sobre la superficie de la tela, tiene cada punto. Si la definición de textura fuera más compleja se la podría representar por un vector de números reales cada uno de los cuales asociaría al punto un cierto atributo. El color se puede representar con un triplete (tres valores reales) que indicarán las proporciones de los colores básicos que conforman el color de cada punto. Es válida aquí también la observación realizada en con respecto a la textura. En definitiva cada punto de un cuadro puede ser representado por la siguiente quíntupla:

$$C = \langle x, y, t, c_r, c_a, c_z \rangle$$

en donde

x,y coordenadas del punto

t textura representada por la altura del punto sobre la tela

c_r, c_a, c_z son las proporciones respectivamente de rojo, amarillo y azul

En realidad esta transformación de los puntos de un cuadro en un vector de valores es lo que realizan los escáneres cuando procesan una imagen, ya que cada punto de la pantalla de un monitor esta caracterizado por tres valores llamados representación RGB (Red, Green y Blue). Aun no hay escáners que puedan leer la textura.

Sintetizando un cuadro es un subconjunto de $\Re^5$. Por lo tanto el conjunto de todos los cuadros será **P($\Re^5$).** La cardinalidad de $\Re^5$ es $\aleph_1$ por lo que la cardinalidad de **C** será $2^{\aleph_1} = \aleph_2$. Con esto queda demostrado que la "cantidad" de cuadros es mucho mayor que la cantidad de lenguajes con lo que puede decirse que el lenguaje plástico es mucho más rico que el lenguaje literario.

Aunque parezca en un comienzo que los párrafos que siguen nada tienen que ver con el tema que estamos tratando veremos sin embargo que los lenguajes las artes pláticas y muchas otras actividades del ser humano vinculadas con su cultura tienen mucho que ver con los fenómenos que ocurren en una vieja caldera del ferrocarril.

Todos saben que si se cierra una botella llena de aire a la presión atmosférica, es imposible generar energía a partir de ella. Sin embargo las moléculas del gas que se encuentran en su interior están en continuo movimiento cada una de ellas a una velocidad diferente respondiendo a una distribución aleatoria. La componente de todas las velocidades da cero y es por ello que el gas no se traslada. Si hubiera una componente común existiría un flujo que desplazaría las moléculas de un lugar a otro. Cuando el gas está en reposo el movimiento de las moléculas es aleatorio y recibe el nombre de movimiento browniano[47]. Es un movimiento aleatorio en el que una partícula de desplaza de su posición de acuerdo con una ley bien definida de probabilidades. Si se calienta un gas en un compartimiento cerrado, el aumento de la temperatura incrementa la velocidad de las partículas del gas lo da por resultado un aumento de presión. El movimiento browniano puede asimilarse al comportamiento de una serie de bolas que se lanzan en una mesa de billar sin fricción y con bandas perfectamente elásticas (no hay fricción en el desplazamiento ni pérdida de energía en los choques entre si y con las bandas). Cada bola seguirá una trayectoria recta hasta que encuentre o bien una banda (las paredes del entorno en el que se realiza la experiencia) o bien otra bola con lo que cambiará su trayectoria de acuerdo con las leyes que regulan los choque perfectos.

En el año 1871 el físico escocés James Clerk Maxwell propuso un experimento teórico que consistía en lo siguiente: Un compartimiento esta dividido por una pared. Un pequeño demonio (En su trabajo Maxwell no lo llamó demonio sino que fue Norbert Wiener quien lo bautizó de esta manera y de esta manera se lo conoce después del año 1920) maneja una pequeña puerta en esta pared. Cuando se acerca a ella una molécula que supera la velocidad promedio de movimiento abre la puerta y la deja pasar a la otra parte del compartimiento, en tanto que si su velocidad es inferior a ella no abre la puerta

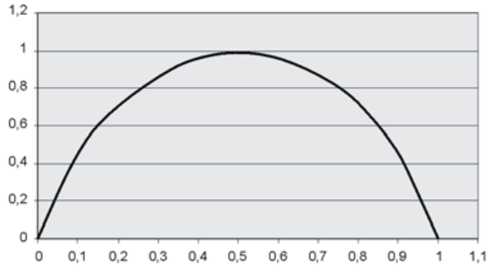
47. Este tipo de movimiento fue observado por Jan Ingenhousz (científico Holandés 1730-1799) en 1785 pero se considera que su descubridor fue el biólogo Robert Brown (Botánico Escocés 1773-1858) en 1827 mientras estudiaba partículas de polen suspendidas en el agua con el microscopio. En 1905 Albert Einstein desarrolló una teoría del movimiento browniano.

y la deja en la parte del compartimiento donde estaba. El objeto de este juego es el de almacenar en una mitad del compartimiento las moléculas rápidas y dejar las lentas en la otra mitad. Luego de transcurrido suficiente tiempo el resultado será que en una mitad estarán todas las moléculas rápidas caracterizadas por una mayor temperatura y presión en tanto que en otra mitad se encuentran las moléculas lentas de menor temperatura y presión. El principio de conservación de la energía no ha sido violado, pero un gas en reposo ha sido distribuido en base a la energía cinética de las moléculas (velocidad). Es posible ahora extraer energía del sistema para hacer funcionar, por ejemplo, una máquina térmica (una turbina de gas por ejemplo). Este es un excelente ejemplo que permite introducir el concepto de entropía como

- La fracción de energía que está disponible para ser transformada en trabajo
- La cantidad de información que falta relativa al estado detallado del sistema

En el experimento virtual de Maxwell el demonio acciona de manera tal que la entropía disminuye es decir después de la experiencia la cantidad de energía disponible aumentó. En otras palabras aumenta la energía disponible aumentando el conocimiento acerca de todas las moléculas del gas. Pero la termodinámica establece que esto es imposible. La entropía sólo puede aumentar (en realidad podría disminuir para algunas partículas pero debe obligatoriamente aumentar para otras de manera tal que la entropía total aumente).

El problema fue resuelto por Leo Szilard[48] en 1929. Cualquier "demonio real" no puede ser un ente incorpóreo que recibe la información por medios telepáticos. Para obtener información acerca del mundo se debe estar en interacción física con él. Con el fin de determinar de que lado una molécula debe estar y, de esa manera, poder decidir si debe o no abrir la puerta, el demonio de Maxwell debe almacenar información acerca del estado de la molécula. Debe, bajo ciertas circunstancias, borrar información que había sido previamente almacenada. El borrado de la información es un proceso termodinámicamente irreversible que aumenta la entropía del sistema. El demonio de Maxwell establece una profunda conexión entre la termodinámica y la teoría de la información.

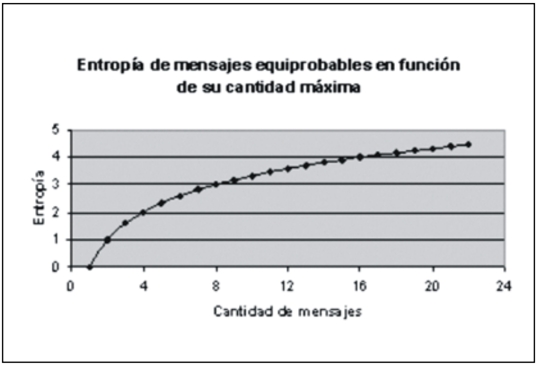


En el año 1940 Claude E. Shanon creó el concepto de entropía asociado a la información. Para una mejor compresión se planteará una serie de ejemplos que aclararán los conceptos. Supóngase que existen dos interlocutores, que se llamarán **A** y **B**, que desean intercambiar

48. Leo Szilard físico y biólogo celular húngaro nacido en Budapest en 1898 y fallecido en La Jolla, California, EEUU en 1964. Entre sus logros más importantes se encuentran los aceleradores lineales de partículas, el ciclotrón, la reacción nuclear en cadena, etc. En su trabajo clásico sobre el demonio de Maxwell en 1929 creó el concepto de BIT de información

información. Supóngase, además, que ambos interlocutores disponen de una lista de **n** mensajes para intercambiar. Si **A** desea enviar un mensaje a **B** elegirá uno de la lista, supóngase el **j,** con una probabilidad $\mathbf{p_j}$**.** Si se supone, en una primera aproximación, que **n** es **1**, es decir hay un solo mensaje, la información que tendrá **B** antes y después de recibir el mensaje será la misma ya que ese mensaje es el único que puede **A** enviar. Es decir la recepción del mensaje no incrementa la información que **B** dispone. Supóngase, ahora, que existen dos mensajes y que la probabilidad de elegir el mensaje **1** es del **99%** en tanto que la del mensaje **2** es de sólo el **1%.** Cuando **B** reciba el mensaje habrá incrementado su información pero muy poco ya que la gran mayoría de las veces recibirá el mensaje **1** y solo un **1%** de las veces recibirá el **2.** Si las probabilidades fueran **50%** para cada uno de los mensajes luego de recibir un mensaje **B** tendrá mucha más información que antes. El mensaje contendrá mucha información. Shanon definió como entropía la expresión $H = -\Sigma p_i \log_2 p_i$ en donde $\mathbf{p_i}$ es la probabilidad de envío del mensaje **i** y $\mathbf{\log_2 p_i}$ es el logaritmo binario de $\mathbf{p_i}$. En el gráfico se representa H para el caso de dos mensajes, recordando que $\mathbf{p_1+p_2=1}$. Del análisis de la curva se deduce que esta tiene un máximo para $\mathbf{p_1=p_2=0{,}5}$ y se dirá que para ese caso el mensaje tiene un bit de información. Puede demostrarse que la mayor entropía para el caso de n mensajes se obtiene cuando las probabilidades de cada uno de ellos son iguales entre sí. Es interesante agregar que en el ejemplo planteado en el que las probabilidades son **99%** y **1%** la entropía es solamente de **0,08** bits. Por ejemplo el texto en inglés tiene sólo una entropía de tan solo 1,5 bits por carácter.

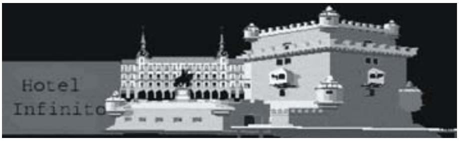
La entropía máxima crece logarítmicamente con la cantidad de posibles eventos. En el gráfico adjunto se representa este crecimiento en función de la cantidad de eventos.



Y ¿qué tiene que ver esto con los cuadros y los infinitos? Tiene que ver con que la cantidad de información que un mensaje tiene es tanto mayor cuanto mayor es el universo de potenciales mensajes.

Así por ejemplo en el caso de un texto la cantidad de posibles mensajes es $\aleph_0$ en tanto que en el caso de los cuadros es $\aleph_2$. Y este último transfinito es mucho mayor que el primero. Los cuadros tienen mucha más información que los textos.

El hotel de Hilbert [49]



Hay un interesante ejemplo de las paradojas que se presentan cuando se hace uso del concepto de infinito. El Hotel de Hilbert es un hotel con infinitas habitaciones y que, por lo tanto, puede llegar a albergar infinitos huéspedes. Una noche llega a él un nuevo huésped que pide una habitación. El conserje, amablemente, le informa:

"*Si, es cierto que nuestra publicidad informa que tenemos infinitas habitaciones. Pero hoy, desgraciadamente, tenemos infinitos huéspedes en nuestras infinitas habitaciones. Así que por el momento no tengo ninguna habitación libre*"

El huésped, decepcionado, decide irse. Pero cuando se dispone a partir, el conserje nuevamente le dice:

"*No se preocupe señor, lo voy a poder alojar*"

El huésped, completamente confundido y quizá creyendo que todo era una broma de mal gusto, pregunta sorprendido:

"¿Pero, cómo hará?"

A lo que el conserje, con un tono que mostraba amabilidad profesional, le responde:

"Muy sencillo, señor. Al huésped que está alojado en la habitación 1 lo pasaré a la 2, al que está en la 2 lo pasaré a la 3 y así sucesivamente. Todos tendrán su habitación puesto que son infinitas pero la 1 quedará libre. Y ahí lo alojaré a usted"

El huésped, incrédulo, le responde:

"Me parece que la solución que me ofrece es materialmente imposible dado que mover de habitación a cada huésped llevará un tiempo mayor que cero y, como es necesario mudar infinitos huéspedes, el tiempo total será infinito por lo que nunca terminará la mudanza"

El conserje rápidamente respondió:

"Señor usted no tiene en cuenta que cada mudanza que realicemos requerirá un 20% menos de tiempo que la anterior debido a la experiencia adquirida, por lo que si la primer mudanza demorara 1 minuto, mudar los infinitos huéspedes demorará sólo 5 minutos" [50]

---

49. David Hilbert fue uno de los más famosos matemáticos de la historia nacido el 23 de enero de 1862 en Königsberg, Prusia (ahora Kaliningrad, Rusia) y fallecido el 14 de febrero de 1943 en Göttingen, Alemania. En el congreso realizado en París el 8 de agosto de 1900, David Hilbert presentó su famosa lista de 23 problemas que quedaban sin resolver en la Matemática. Entre ellos se encontraba la demostración de la hipótesis del continuo que establece que no existe un conjunto que tenga más elementos que los números naturales y menos que los reales. También incluyó la demostración de la hipótesis de Riemann.

50. El razonamiento es similar al empleado por Zenon de Elea en la paradoja de la flecha o la de Aquiles y la tortuga. El tiempo total sería

$$1 + 0,8 + 0,8^2 + 0,8^3 + ... = \sum_{j=0}^{\infty} 0,8^j = \frac{1}{1 - 0,8} = 5$$

No muy convencido con esta explicación el nuevo huésped esperó no con mucha esperanza de que su problema se resolviera. Pero vio con sorpresa que realmente su habitación, la 1, estaba libre. Y ahí se alojó.

Él no se enteró de lo que pasó después porque ya estaba profundamente dormido. Pero fue algo similar, aunque en principio parecía más grave. Una convención de matemáticos llegó y el presidente de la misma dijo al conserje:

"*Aquí vengo con todos los matemáticos de la convención y necesito habitaciones para todos ellos*"

El conserje respondió:

"*Cuantos son*"

La respuesta fue casi inmediata

"*En realidad somos infinitos matemáticos, pero enumerables, es decir somos tantos matemáticos como números naturales hay*."

Nuevamente el conserje, amablemente, respondió:

"*Señor, tengo todas las infinitas habitaciones del hotel ocupadas por infinitos clientes*"

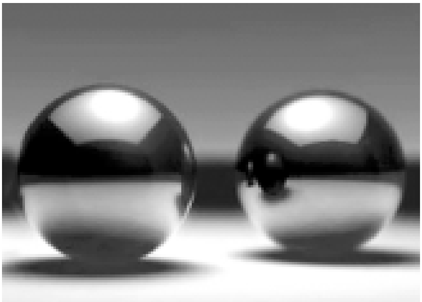
El presidente de la convención, entonces respondió

"*Dado que nuestra convención tiene una cantidad* $\aleph_0$ *de integrantes el problema es sencillo de solucionar. Para ello desplace el que esta en la habitación 1 a la 2, el que esta en la 2 a la 4 y así sucesivamente. Cuando termine todos sus huéspedes actuales tendrán una habitación y las impares, que son infinitas, quedarán libres. En ellas se alojarán los infinitos, pero enumerables, matemáticos de la convención*".

El conserje así hizo y todos tuvieron su habitación. El único que no se sintió tan feliz fue el huésped de la habitación 1 que tuvo que despertarse para mudarse a la habitación 2.

Como se ve el infinito presenta características muy particulares. Es claro que la igualdad de la cardinalidad de dos conjuntos se basa en la posibilidad de poder aparear sus elementos uno a uno.

La paradoja de Banach-Tarsky [51, 52]



Se han puesto suficientes ejemplos como para esta nueva rareza que desafía nuestra intuición y sentido común no nos sorprenda tanto.

El teorema de Banach-Tarsky debe ser, con toda seguridad, uno de los más antiintuitivos resultados obtenidos por los matemáticos. Por esa razón recibe el nombre de la paradoja de Banach-Tarsky.

51. Banach nació el 30 de marzo de 1892 en Kraków, Austria-Hungary (ahora Polonia) y murió el 31 de agosto de 1945 in Lvov, (ahora Ucrania)

52. Tarsky nació el 14 de enero de 1902 en Varsovia, imperio ruso (ahora Polonia) y murió el 26 de oct de 1983 en Berkeley, California, E.E.U.U.

El teorema de *Banach*-Tarsky fue presentada en un trabajo realizado por ambos matemáticos en el año 1926 en la publicación *Fundamenta Mathematicae* titulado *"Sur la décomposition des ensembles de points en partiens respectivement congruent"*. El teorema establece que una esfera puede dividirse en una cantidad finita de trozos los que reordenados de una forma especial, como si fueran las piezas de un rompecabezas tridimensional, pueden conformar dos esferas de la misma dimensión que la primera y completamente macizas. El resultado resulta tan absurdo que por ello este teorema se lo conoce bajo el nombre de paradoja de Banach-Tarsky. Constituye una de las contribuciones más importantes a la teoría axiomática de conjuntos realizada en ese período. Para poder demostrarlo es necesario hacer uso del axioma de la elección que es una de las herramientas que se han revelado más potentes dentro de la teoría de los conjuntos.

Pero, qué dice este axioma. Su enunciado es el siguiente:

***Sea A una colección de conjuntos no vacíos. Es posible crear un nuevo conjunto tomando un elemento de cada uno de los conjuntos de A*.**

Esto parece «razonable» y «evidente». Al fin y al cabo, establece que para cualquier colección no vacía de conjuntos no vacíos es posible tomar un elemento de cada uno de ellos. Pero este axioma es muy general. Dice «cualquier» familia (o colección) y esto se aplica a conjuntos infinitos, familias infinitas de conjuntos infinitos, familias de familias de conjuntos infinitos, ... ¿Cómo hacer la elección cuando el conjunto es tan inmenso? Así este axioma no es tan inocente como parece y no es aceptado por todos los matemáticos. De hecho, se puede considerar que la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (o la de Neumann-Bernays-Gödel) sin el axioma de elección es quizás la teoría más «aceptable».

Sin embargo, del axioma de elección se deducen muchos resultados que todavía no tienen demostración sin éste. Pero, ¿realmente es peligroso usar este axioma? Esta pregunta la respondió Gödel en el año 1938. Demostró que si la teoría de conjuntos sin el axioma de elección es consistente, también lo es con el axioma de elección. ¿Qué quiere decir esto? Simplemente que utilizar el axioma de elección no lleva a contradicciones que no estén ya presentes sin su uso.

Como ya se dijo en el año 1924 Tarsky y Banach elaboraron una demostración. Posteriormente, en 1944, R. M. Robinson demostró que la cantidad de piezas podía llegar a ser tan pequeña como cinco.

La pregunta razonable es ¿dónde está el truco? Pero en realidad las demostraciones son tan rigurosas que no existe truco alguno. Sin embargo está tan opuesto a la intuición y al sentido común que su aceptación lisa y llana llevaría a violar, si se tratara de esferas materiales, el principio de la conservación de la masa sin la existencia de reacciones nucleares.

Dejando de lado las esferas materiales es necesario reflexionar considerando solamente subconjuntos dentro de un espacio tridimensional con forma de esfera. Aunque no se haya mencionado, se está en el terreno de lo que se conoce como teoría de la medida. La idea de medida es intuitiva y es un valor numérico que se asocia a un conjunto que cuantifica alguna de sus propiedades como por ejemplo el volumen, el peso o la longitud. El sentido común lleva a aceptar las siguientes tres propiedades:

- La medida no puede ser negativa
- La medida debe ser invariante cuando se desplaza el conjunto por medio de movimientos rígidos es decir aquellos que no alteran la distancia entre dos puntos arbitrarios del conjunto[53] .
- La medida debe ser aditiva. Esto significa que la medida de la unión de varios conjuntos sin partes comunes es la suma de la medida de cada uno de ellos.

Parecería entonces que el resultado del teorema es una aberración. Pero hay una explicación aunque la misma no es tan intuitiva. Se puede demostrar, aplicando el axioma de la elección, que existen conjuntos de puntos que no tienen medida. Es conveniente aclarar esto. Ello no implica que tengan medida nula, sino que implica que, tal cual se lo ha definido, la medida lisa y llanamente no existe, es decir no tiene ningún valor.

Conclusiones

En las páginas anteriores se han evocado algunos de los pensamientos que el concepto de infinito ha generado en el hombre. El recorrido no pretendió ser exhaustivo ni abarcativo de todos los enfoques diferentes con los que se puede encarar la idea de infinito. Se ha visto que tanto desde el pensamiento filosófico, metafísico, artístico, literario el infinito está presente.

No se ha querido abandonar el tema sin mencionar algunos puntos de vista del infinito que pertenecen a la cultura popular. La frase del famoso Grucho Marx cuando dijo:

«Nunca pertenecería a un club que admitiera como socio a alguien como yo.»

Es una forma particular de la paradoja del barbero ya que pertenecería al club si y solo si no perteneciera al club.

Cabe también recordar la famosa frase popular que quizá algunos recordaremos y que está escrita en aquellos viejos almacenes de nuestra juventud y niñez:

Hoy no se fía mañana sí.

Es esta una manera recursiva de poder definir la negación total.

Bibliografía

Ángel, Ernest Newman. Gödel's Proof. New York University Press, 1958.

Bernays, Paul. The Basic Notion of Pure Geometry in their Relation to Intuition. www.phil.cmu.edu.

Cantor, Greg. Contribution to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers. Dover Publications, Inc.

---

53. Evidentemente no se tienen en cuenta efectos relativísticos

Devaney, Robert L. A first course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment. Perseus Books Publishings, Massachisetts, 1992. ISBN 0-201-55406-2.

Gallager, Robert G. Information Theory and Reliable Communication. John Wily and Sons, INC, 1968. SBN 471 29048 3.

Gödel, Kurt. Colected Works, Volumen I. Oxford University Press, New York, 1986. ISBN 0-19-503964-5.

Hofstadter, Douglas R. Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid. Basic Books Ink., 1999. ISBN 0-465-02656-7.

Kamke, E. Theory of Sets. Dover Publications, Inc.

Khinchin, A. I. Mathematical Foundation of Information Theory. Dover Publications, Inc.

Mac Lane, Saunders. Birkhoff, Garrett. Álgebra. The Macmillan Company, New York, 1968.

Malean, Jeffery T Validity, Truth and Faith in Mathematics. www.stthomas.edu.

Peitgen, Heinz-Otto. Jürgens, Hartmut, Saupe, Dietmar. Chaos and Fractals. New Frontiers of Science. Springer Verlag, New York, 1992. ISBN 0-387-97903-4.

Rucker, Rudy. Infinity and the Mind. Princeton University Press, Princeton, New Jersey ISBN 0-691-00172-3.

Russell, Bertrand. Los Principios de la Matemática. Espasa-Calpe Argentina, S. A., 1948

Suppes, Patric. Teoría Axiomática de Conjuntos. Editorial Norma, Cali, Colombia.

Suppes, Patrick. Axiomatic Set Theory. Dover Publications, Inc. New York 1972.

Wittgenstein, Ludwig. Tractus logico-philosophicus. Editorial Tecnos (Grupo Anaya, S. A.) 2003. ISBN 84-309-3940-7.