

Facilitando el aprendizaje de trigonometría a través de una interfaz tangible

Francisco Zamorano Urrutia ⁽¹⁾, Catalina Cortés Loyola ⁽²⁾ y Mauricio Herrera Marín ⁽³⁾

Resumen: En educación matemática, estudios evidencian dificultades y desafíos en la enseñanza-aprendizaje de trigonometría en educación secundaria y superior, donde no se estimula al estudiante a obtener un entendimiento conceptual profundo de los conceptos. Considerando su relevancia para diversas disciplinas, es necesario implementar nuevos acercamientos a su enseñanza, donde se privilegie un rol activo del estudiante en su propio aprendizaje. Diversos estudios demuestran que la incorporación de tecnologías digitales influyen positivamente aprendizaje de los alumnos, sin embargo, la mayoría de las tecnologías existentes responden al paradigma de interacción tradicional con un computador, donde no se considera el uso del cuerpo y de los múltiples sentidos. Las Interfaces Tangibles (TUI) en cambio, pueden albergar interacciones corporales, brindando directo tributo a la teoría de la Cognición Corporal. Sin embargo existe un vacío en la aplicación de TUI para la educación de trigonometría. Esta investigación consistió en diseñar y validar una interfaz tangible para la enseñanza-aprendizaje de trigonometría inicial. La interfaz alberga una experiencia de aprendizaje que privilegia la exploración, el uso de la intuición, y fomenta el aprendizaje colaborativo. Se realizó un Pre-Test diagnóstico con 119 estudiantes para determinar conocimientos previos dando un rendimiento promedio de 29.1%. Luego de dos intervenciones con la interfaz propuesta, los resultados de un Post-Test muestran un incremento del rendimiento en un 37.1%, lo que valida la efectividad pedagógica de la interfaz y experiencia pedagógica para el aprendizaje de conceptos básicos de trigonometría.

Palabras clave: trigonometría - diseño de interacción - aprendizaje - interfaces tangibles - cognición corporal.

[Resúmenes en inglés y portugués en las páginas 231-232]

⁽¹⁾ Master of Fine Arts in Design and Technology, Parsons School of Design, USA. Diseñador, Pontificia Universidad Católica de Chile. Docente Investigador, Facultad de Diseño, Universidad del Desarrollo, Chile.

⁽²⁾ Catalina Cortés Loyola Master of Science in Design, Arizona State University, USA. Diseñadora, Pontificia Universidad Católica de Chile. Docente Investigador, Universidad del Desarrollo, Facultad de Diseño.

⁽³⁾ Post-Doc, Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel. PhD. en Física, Universidad de Chile. Master of Science in Mathematics and Physics, Odessa I. I. Mechnikov University, Ucrania. Docente Investigador, Facultad de Ingeniería, Universidad del Desarrollo.

Introducción

La trigonometría es requisito fundamental para el estudio tanto de la matemática avanzada como para las ciencias, por ejemplo, modelando el comportamiento de las ondas de luz y el sonido. El Consejo nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) de Estados Unidos, destaca la importancia de la trigonometría en el estudio de funciones periódicas y enfatizan la utilidad de la trigonometría en la investigación de fenómenos del mundo real (Curri, 2012). Desde una perspectiva cognitiva, la trigonometría es fértil en conectar razonamiento algebraico, geométrico y gráfico (Weber, 2005). En disciplinas del ámbito proyectual, como la Arquitectura o el Diseño, la trigonometría es relevante para diseñar diversas estructuras como sillas y puentes, y hoy cobra especial relevancia con la masificación del diseño paramétrico asistido por computador. En el campo de la animación digital, la trigonometría se usa para animar objetos con una cadencia natural, y en diseño gráfico para visualizar datos en un gráfico circular. Las aplicaciones de trigonometría son infinitas e independiente a si se aplica de manera intuitiva o más consciente, su importancia es transversal en el quehacer de diversas disciplinas.

Sin embargo, a pesar de su importancia, el aprendizaje de trigonometría suele percibirse como algo difícil y muchas veces tedioso. Diversas investigaciones demuestran que la enseñanza y aprendizaje de trigonometría sigue siendo un tema complejo de comprender tanto para los estudiantes como para los profesores (Brown, 2006; Thompson, Carlson, & Silverman, 2007; Weber, 2005). Estas dificultades emanan en cierta medida de las prácticas de enseñanza tradicional de las matemáticas, donde el profesor debe asegurarse de cubrir los contenidos especificados en el plan de estudio en un tiempo limitado, no dando mucho espacio a la experimentación. Los estudiantes son entonces sometidos a procedimientos repetitivos basados en el Conductismo (Skinner, 1976), por ejemplo, mediante cátedras y evaluaciones cíclicas. El proceso se repite una y otra vez y el aprendizaje supuestamente se refuerza por medio de la repetición. Sin embargo, este tipo de prácticas pedagógicas no suelen estimular la creatividad y no incorporan la premisa de que los seres humanos agregan significados al proceso de pensamiento (Johnson, 2013).

La visión constructivista en cambio, postula que los estudiantes deben aprender construyendo algo con su conocimiento previo (Ambrose, Bridges, Dipietro, Lovett, & Norman, 2010) y que la combinación de la información nueva con los conceptos ya interiorizados produce un aprendizaje significativo (Vygotsky, 1980). Bajo este enfoque, los estudiantes son desafiados con un problema y se les anima a trabajar por su cuenta para resolverlo, promoviendo niveles superiores de pensamiento. El constructivismo ha tenido un sostenido avance en la educación en los últimos años, involucrando la incorporación de metodologías y tecnologías más participativas en la sala de clases, afectando positivamente

el desempeño y aprendizaje de los estudiantes (Kepceoğlu & Yavuz, 2016; Marshall, 2007; Scarlatos, 2002). La educación matemática ha sido impactada con la integración de las llamadas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), en particular por los denominados “Software de Matemática Dinámica” o Dynamic Mathematical Software (DMS), aplicaciones digitales que han permitido a profesores y estudiantes experimentar con modelos matemáticos de una manera interactiva y dinámica. Existen diversos DMS que se utilizan en la actualidad, como Matlab, SageMath o Wolfram Alpha. Una de las herramientas más populares y ampliamente usadas es Geogebra (<https://www.geogebra.org>) que destaca por su acercamiento visual e intuitivo. Geogebra permite ver simultáneamente representaciones gráficas, numéricas y visuales de un objeto matemático, y a través de una filosofía de “aprender haciendo” provee un terreno fértil para que los estudiantes planteen hipótesis, realicen descubrimientos y obtengan conclusiones empíricamente (Dockendorff & Solar, 2018; Kepceoğlu & Yavuz, 2016; Zengin, 2018).

Sin embargo, los DMS suelen estar limitados a interacciones individuales entre un usuario, un ratón y un computador, no tomando en consideración que los seres humanos somos capaces de aprender a través del cuerpo y de experiencias multisensoriales. La teoría de la Cognición Corporal postula que la forma en que aprendemos nuevos conceptos es sobre la base del conocimiento corporal previo que almacenamos desde la niñez. Lakoff y Nuñez (2000), explican que los seres humanos interiorizan conceptos abstractos en términos concretos utilizando ideas y modos de razonamiento fundamentados en el sistema sensorio-motor. El mecanismo por el cual el concepto abstracto es comprendido en términos del concreto se denomina Metáfora Conceptual, que consiste en una transferencia o “mapeo” desde un “concepto fuente” (*source*) a otro “concepto objeto” (*target*). Los conceptos fuente son a menudo concretos y poseen algún tipo de “base corporal” (Dodge & Lakoff, 2005; Pecher, Boot, & Van Dantzig, 2011), mientras que los conceptos objeto suelen ser abstractos y no pueden ser directamente experimentados o percibidos. En un contexto pedagógico de las matemáticas, las metáforas sirven para transmitir una comprensión básica de nociones abstractas de la matemática para encapsularlas en una “imagen” vívida e informativa, facilitando así la interiorización de conceptos abstractos (Font, Bolite, & Acevedo, 2010). El conocimiento conceptual matemático es en gran medida metafórico, haciendo uso frecuente de la transferencia conceptual, como cuando visualizamos los números como puntos en una línea continua. Dado que muchos de nuestros conceptos son metafóricos, nuestra comprensión conceptual resulta depender crucialmente de la naturaleza de nuestros cuerpos y del entorno físico en el que funcionan (Lakoff, 2009).

En contraste con las DMS donde la interacción corporal queda reducida al uso de un ratón, las interfaces tangibles o Tangible User Interfaces (TUI) permiten albergar experiencias de aprendizaje que involucran al uso del cuerpo de una forma más completa y activa, brindando directo tributo a los principios de la Cognición Corporal. Las TUI son aquellas interfaces que dan forma física a elementos digitales, permitiendo manipular directamente la información digital con las manos (Ishii & Ullmer, 1997). Los primeros acercamientos a las TUI se realizaron a finales de la década de los noventa, gracias al trabajo seminal de Iroshi Ishii y Brigg Ullmer en el Tangible Media Group de MIT. En las décadas siguientes, el desarrollo de las TUI se enfocó a sistemas que exploraban posibilidades técnicas, y más recientemente la investigación ha madurado hacia la reflexión crítica, teoría y construc-

ción de un cuerpo de conocimiento más sólido dentro del campo del Human-Computer Interaction o HCI (Shaer & Hornecker, 2010) Tangible User Interfaces (TUIs).

El uso de las TUI posee una serie de beneficios a nivel cognitivo: habilita instancias de descubrimiento individual y colaborativo más rápidas, apoya la formación de hipótesis, mejora la comprensión a través de la combinación de los diferentes sentidos y permite la evaluación rápida de alternativas (Jetter, Reiterer, & Geyer, 2014). Asimismo, Las TUI fomentan la experimentación y permiten la posibilidad de hacer y deshacer acciones rápidamente potenciando así la experiencia de aprendizaje (Resnick et al., 2005).

En los últimos años, el desarrollo y posibilidades de las TUI se ha vuelto cada vez más accesible debido al avance y democratización propia de las tecnologías, por lo que sus campos de aplicación se han diversificado, pudiendo hoy encontrarlas en la esfera pública y privada: kioscos de museos de ciencia, piezas de arte interactivo, mesas colaborativas en oficinas, y más recientemente en wearables (interfaces vestibles). A pesar de que las TUI han ido ganando popularidad en la educación –en especial en educación pre-escolar y primaria–, existe un potencial poco explorado en el uso de tangibilidad para habilitar una comprensión más profunda de conceptos abstractos de la matemática y de la trigonometría. Esto presenta una oportunidad de incorporar los beneficios de los DMS y de principios de la Cognición Corporal en una herramienta que permita facilitar y potenciar el aprendizaje de trigonometría.

DetECCIÓN DE OPORTUNIDAD

En Chile, las dificultades en el aprendizaje de la trigonometría se ven agravadas por el hecho de que la trigonometría no se evalúa en la Prueba de Selección Universitaria (PSU) de Matemáticas, en consecuencia, en los años finales de educación secundaria pasa a ser un tema poco considerado en la malla curricular. Esto produce que en algunos casos los estudiantes de secundaria pierdan el interés por tener una visión global y profunda de los conceptos trigonométricos, acarreando la deficiencia al ingresar a la educación superior. El presente estudio fue desarrollado en la Universidad del Desarrollo (UDD), en Santiago Chile, a través de la colaboración entre la Facultad de Diseño y la Facultad de Ingeniería. Uno de los puntos de partida para la investigación fue el resultado del test diagnóstico de la carrera de Ingeniería de la misma universidad en 2017. Este test se aplica durante las primeras semanas del año académico y es rendido por todos los alumnos de primer año de Ingeniería para obtener un diagnóstico de sus conocimientos básicos de temas relevantes para la disciplina. Los resultados demuestran que la trigonometría es un tema que presenta deficiencias comparativas donde se observa que alcanzó el rendimiento más bajo (14% y 17%) dentro de todos los temas abordados en el test (versus un 28% de rendimiento global). Los resultados del test empujaron al equipo de investigación a indagar sobre la recurrencia de estas deficiencias en otras carreras. En la carrera de Diseño por ejemplo, la malla curricular no contempla instrucción formal de trigonometría ni de ninguna rama de las matemáticas, lo cual llevó a inferir que el conocimiento de trigonometría en este grupo de estudiantes sería también problemático. Al no existir una prueba de diagnóstico

de conocimientos matemáticos en Diseño, la hipótesis requeriría de más estudios para determinar el nivel de conocimiento trigonométrico en estudiantes de esta disciplina. El grupo conformado por los alumnos de ambas carreras se perfiló entonces como un grupo interesante para participar en el estudio: por un lado los estudiantes de Ingeniería tienen instrucción formal de trigonometría pero presentan serias deficiencias iniciales, por otro lado, los estudiantes de Diseño aplican la trigonometría intuitivamente durante su carrera, pero no cuentan con instrucción formal.

Propuesta de investigación

La revisión de literatura inicial permitió identificar que existen dificultades en la enseñanza-aprendizaje de trigonometría. Asimismo, evidencia que la incorporación de TIC en la sala de clases es positiva para el aprendizaje (Camilleri & Camilleri, 2017). Diversos autores destacan los beneficios del uso de los DMS en la educación de matemáticas (Dockendorff & Solar, 2018; Kepceoğlu & Yavuz, 2016; Mushipe & Ogbonnaya, 2019; Zengin, 2018). Asimismo, se evidencia un vacío en la aplicación de las TUI para la enseñanza de temas abstractos como las matemáticas (De Raffaele, Smith, & Gemikonakli, 2018). Estos factores impulsaron al equipo de investigación a considerar realizar una intervención en el proceso de aprendizaje en estudiantes de pregrado, donde la influencia de una TUI podría ser beneficiosa para facilitar la adquisición de conocimientos de trigonometría básica. Para dar inicio al diseño de la interfaz propuesta, se plantearon las siguientes preguntas: ¿Cómo podemos aprender trigonometría básica de una manera más intuitiva y manejable? ¿Cómo podemos hacer que los estudiantes cambien su percepción negativa del aprendizaje de trigonometría? ¿Puede una TUI facilitar el aprendizaje de conceptos de trigonometría?

Estas preguntas condujeron a la definición de los objetivos de investigación. El objetivo central de este estudio fue definir las variables tecnológicas, formales, sensoriales y perceptuales que debe considerar una interfaz tangible educativa para aprender conceptos básicos de trigonometría a través de la incorporación de principios de la teoría de Cognición Corporal.

Se definieron tres objetivos específicos:

1. Diseñar, por medio de un proceso iterativo, una interfaz tangible (TUI) que integre la utilización de múltiples sentidos con la finalidad de facilitar la comprensión de conceptos de trigonometría en estudiantes de pregrado.
2. Determinar el contenido y progresión de la experiencia didáctica para facilitar el aprendizaje.
3. Medir el impacto de la experiencia en el aprendizaje de los estudiantes al estar expuestos a la interfaz.

Marco conceptual para el diseño de una TUI: Interacción Mezclada

El diseño de interfaces avanza aceleradamente, sin embargo, aún existe una tendencia de apelar al paradigma de interacción denominado “Interfaces WIMP” –Windows, Icons, Menus, Pointer– (Gentner & Nielson, 1996). Las TUI en cambio, abren nuevas posibilidades de diseño y exploración al escapar de este paradigma y proponer nuevas interfaces con formas e interacciones no tradicionales. Sin embargo, esto conlleva a nuevos desafíos tanto para usuarios como para los diseñadores de estas interfaces. Los usuarios al enfrentarse a una interfaz no tradicional, tienen el desafío de aprender a operar un sistema antes de poder acceder a la experiencia propuesta. Esto es especialmente crítico en el caso de las interfaces con finalidades educativas, donde el aprendizaje debe estar enfocado en el contenido y no en aprender a operar una interfaz nueva. En consecuencia, los diseñadores de interfaces deben seleccionar cuidadosamente la forma y las propiedades de la interfaz para lograr un buen equilibrio entre novedad y familiaridad, para permitir un acercamiento natural de los usuarios hacia el nuevo sistema y evitar que inviertan demasiados recursos cognitivos en aprender a operar un sistema. Esto implica que se deben considerar tanto los aspectos digitales como físicos y la interrelación entre ellos para constituir componentes híbridos (Hornecker & Buur, 2006) tomando en cuenta el uso del cuerpo, los estímulos multisensoriales y el espacio físico que alberga la interacción humano-sistema.

Los autores Jetter, Reiterer and Geyer (2014), plantean un marco conceptual denominado “Blended Interaction” o Interacción Mezclada, para diseñar interfaces que puedan ser percibidas como “naturales” por los usuarios. La Interacción Mezclada plantea que la adquisición de nuevos conceptos de interacción se produce a través de la mezcla de al menos dos fuentes de conocimiento provenientes de experiencias previas del mundo digital y del mundo físico. Esta mezcla crea una estructura conceptual emergente que no existía en las fuentes de origen. Este mecanismo es muy similar a como operan las Metáforas Conceptuales en la Cognición Corporal, donde los nuevos conceptos son comprendidos a través una transferencia de experiencias previas hacia nuevos conceptos. Diversos autores han postulado que la combinación adecuada de experiencias previas del mundo físico y social, en combinación con aquellas ya familiares del ámbito digital, permiten que una interfaz sea entendida y operada más fácilmente (Hollan, Hutchins, & Norman, 1985; Jetter et al., 2014).

En este estudio, la Interacción Mezclada fue tomada como guía para determinar los aspectos relevantes en el diseño de la interfaz propuesta, enfocándose mayoritariamente en cuatro dimensiones:

- Interacción Individual: centrada en capacidades individuales apoyada en elementos multimodales.
- Interacción Social: actividades grupales sujetas a convenciones preestablecidas que provienen de las interacciones de la vida diaria.
- Jornada de Usuario o Workflow: definición de una “jornada de usuario” que se ordena temporalmente constituyendo la experiencia.
- Espacio Físico: la forma-función de los componentes de la interfaz y la disposición del espacio físico para definir la naturaleza de la experiencia.

Estrategias de diseño, prototipado y validación

Este estudio tuvo una duración de 12 meses de desarrollo. La estrategia a nivel metodológico comprendió dos dimensiones: el diseño de una interfaz a través de un proceso de diseño e iterativo y la medición de resultados de aprendizaje en estudiantes expuestos a dicha interfaz. Se optó entonces por una metodología cuasi experimental y mixta, incorporando levantamiento de datos cualitativos para informar el desarrollo del diseño desde la perspectiva de usabilidad y efectividad pedagógica (Driscoll, 2000; Jetter et al., 2014), y levantamiento de datos cuantitativos para medir el impacto de aprendizaje en alumnos de primer año en pregrado en las carreras de Diseño e Ingeniería de la UDD.

El proceso de diseño se basó en una versión modificada del Modelo del Doble Diamante (Council, 2014), que combina un eje temporal, con la representación de cuatro ciclos de pensamiento convergente y divergente. Las etapas del proceso se definen como: descubrir, definir, desarrollar, entregar (Bravo, 2016). Los ciclos divergentes consistieron en revisión y sistematización de literatura especializada, caracterización de prototipos, y pruebas de solución para el diseño de la interfaz. Las fases convergentes fueron etapas de definición y testeo de prototipos con usuarios en relación a dos factores co-dependientes: el diseño de la experiencia pedagógica y la integración progresiva de componentes tecnológicos, visuales, auditivos, y formales a la interfaz.

Varios estudios en el campo de Human-Computer Interaction (HCI) dan cuenta de los beneficios del prototipado como metodología de diseño de una interfaz. J.S. Dumas y J. Redish (1999), en *A Practical Guide to Usability Testing*, señalan cuatro grandes beneficios: los prototipos permiten recibir retroalimentación y opiniones de los participantes en las etapas tempranas de desarrollo; permiten a los diseñadores explorar diversos conceptos de diseño antes de comprometerse con un camino en particular; permiten evaluar varias iteraciones de un diseño, y abstraen las complejidades de una interfaz integrada para enfocarse en aspectos particulares, sistematizando así el proceso de diseño. Durante este estudio se desarrollaron una serie de prototipos de fidelidad incremental, los cuales fueron testeados por usuarios en cada etapa. El objetivo del desarrollo prototipos iterativos se centró en la observación de los usuarios interactuando con la interfaz y en la retroalimentación que ellos proporcionaron. Se utilizó el modelo propuesto por Houde & Hill (1997) para definir el foco de cada prototipo considerando tres dimensiones: El “rol” respecto de su uso como mediador del aprendizaje; La “implementación” para definir la tecnología y funcionamiento de la interfaz; y el “*look and feel*” para considerar los aspectos sensoriales. Los prototipos desarrollados se clasifican en dos categorías: los “Modelos Intermedios” y los “Prototipos Oficiales”. Los Modelos Intermedios fueron prototipos de mediana fidelidad que tenían el objetivo de probar opciones de diseño y obtener data cualitativa de los usuarios, con el fin de informar las siguientes iteraciones. Los Modelos intermedios fueron testeados por un grupo al que llamamos “*Testers*”, conformado por alumnos y profesores de ambas carreras. El registro de las sesiones con los *Testers* se realizó por medio de video, fotografía y una pauta de observación que incluyó aspectos técnicos de la interfaz y la progresión en la presentación de los contenidos. En las sesiones, se aplicó un cuestionario de usabilidad y validación de interfaces usando una escala de Likert (de 1 a 9) y basado en el *Questionnaire for User Interaction Satisfaction* (Chin, Diehl, & Norman, 1988) *150 PC user*

group members, rated familiar software products. Two pairs of software categories were compared: 1 desarrollado por el departamento de Psicología de la Universidad de Maryland en 1988. Los datos obtenidos de estas sesiones contribuyeron al proceso de desarrollo de la interfaz y de la experiencia pedagógica, informando las decisiones para las versiones posteriores. Los Prototipos Oficiales (“Prototipo 1” y “Prototipo 2”) fueron testeados en condiciones controladas con un grupo experimental (distinto al grupo *Tester*). Este grupo participó también en las actividades de medición de aprendizaje por medio de un instrumento que explicamos a continuación.

Para medir conocimientos adquiridos en estudiantes de pregrado, se compararon los resultados de un Pre y Post-Test (iguales) elaborado por el equipo de investigación. Ambos tests fueron aplicados a estudiantes de las carreras de Ingeniería y Diseño al inicio y al final de una intervención con la interfaz a lo largo de un año académico. 119 alumnos rindieron el Pre-Test (n=64 de Diseño y n=56 de Ingeniería), del cual se extrajo el Grupo Experimental y el Grupo Control. El Grupo Experimental está constituido por 24 alumnos (n=10 de Diseño y n=14 de Ingeniería), quienes participaron de 2 sesiones de treinta minutos cada una, donde interactuaron con la interfaz. El grupo Control está constituido por 88 alumnos de ambas carreras, quienes rindieron el Pre-Test y Post-Test sin interactuar con la interfaz. Durante el curso normal del año académico, los estudiantes de Ingeniería fueron expuestos a la enseñanza tradicional de los contenidos según el programa del curso de Geometría y los alumnos de Diseño no recibieron instrucción formal. El diseño del experimento permitió medir estadísticamente el impacto en el aprendizaje de ambos grupos de alumnos comparativamente.

En la tabla a continuación se grafican las actividades y la participación de cada grupo en el tiempo:

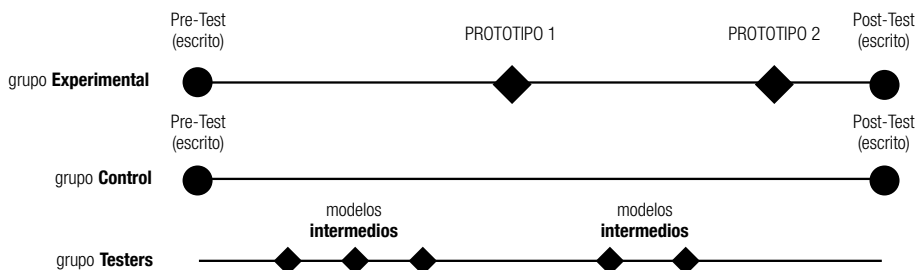


Figura 1. Actividades y participación de cada grupo en el tiempo.

Descripción de la interfaz

La interfaz considera los beneficios de integrar varios sentidos periféricos –visión, tacto y audición– como estrategia de aprendizaje (Shams & Seitz, 2008). Consiste en una pantalla LCD y un cuerpo físico que incluye una estructura de soporte, controladores tangibles, sensores y parlantes que emiten sonido.

La Interfaz Gráfica de Usuario (GUI) despliega una serie de visualizaciones de conceptos trigonométricos en la pantalla LCD. La representación gráfica se basa en el modelo del círculo unitario, ampliamente utilizado en el aprendizaje de trigonometría. El modelo del Círculo Unitario se escogió porque es adecuado para comprender funciones periódicas y permite simplificar el cálculo de seno y coseno en base a un ángulo (Mesa & Goldstein, 2016). Junto al círculo unitario, otros elementos gráficos describen los valores de seno, coseno y ángulo. Asimismo, se incluyen secciones donde se pueden visualizar y manipular funciones periódicas.

La GUI es controlada a través de controladores físicos, que por medio de gestos con las manos (apretar, desplazar, girar), permiten a los usuarios modificar los elementos digitales en la pantalla. El controlador principal es lo que se denomina “Anillo” es un aro de 32 centímetros que se puede girar en ambas direcciones con la mano. El Anillo controla el ángulo principal dentro del Círculo Unitario, que en consecuencia determina los valores de seno y coseno. Otros controladores adicionales tienen formas más cotidianas—como perillas (knobs) y sliders— que controlan parámetros adicionales del modelo y permiten navegar en la progresión de contenidos.



Figura 2. Prototipo 2. Vista general (izquierda) Detalle del “Anillo” en uso, donde se observa parte de la GUI en la pantalla LCD (derecha)

El sonido en la interfaz se utiliza de dos maneras: La primera es destacando información relevante a través de un sonido. Por ejemplo, cuando se alcanza un “ángulo de referencia” (0, 30, 45, 60, 90, etc) se escucha un “beep”, lo cual indica al usuario que ese valor es relevante de analizar. La segunda manera es explorando conceptos trigonométricos a través

del sonido. Por ejemplo, cuando el usuario varía parámetros de una visualización de una función periódica, se escucha un sonido que cambia de tono y volumen que refuerza los conceptos de amplitud y frecuencia de la función.

Descripción de la experiencia pedagógica

Diversos estudios revelan que el aprendizaje a través de la memorización tanto de conceptos como de procedimientos no conduce a un real entendimiento de la materia y generalmente solo apunta a la solución rápida de un problema matemático, dejando de lado el entendimiento conceptual y la capacidad de comprender un mismo concepto representado de distintas maneras (Weber, 2005). Con esto en consideración, el diseño de la experiencia pedagógica se enfocó en apoyar la comprensión conceptual profunda de conceptos básicos de trigonometría, en vez de basarse en la resolución de problemas matemáticos o ecuaciones complejas como suele hacerse tradicionalmente. En ese sentido, se considera más importante comprender, por ejemplo, qué son seno y coseno más que cómo calcularlos y aplicarlos. El objetivo final de la experiencia es proveer al alumno de una comprensión conceptual que le permita enfrentarse con mejores herramientas a tareas más complejas en el futuro.

Para definir el espectro de conceptos básicos de trigonometría que la experiencia pedagógica debía abarcar, el contenido se estructuró en cinco “Módulos Temáticos”, que cubren conceptos básicos de trigonometría. Los módulos se definieron en base a los antecedentes derivados del Pre-Test, la literatura pedagógica de matemáticas, y de la experiencia de docentes de Ingeniería. Los módulos incluyen:

- Módulo 1: Plano cartesiano y coordenadas polares
- Módulo 2: Valores de seno en base a un ángulo
- Módulo 3: Valores de coseno en base a un ángulo
- Módulo 4: Funciones periódicas y curvas sinusoidales
- Módulo 5: Ángulos de referencia y ángulos reflejados

La experiencia pedagógica consiste en grupos de dos a cinco estudiantes cada uno y un Facilitador (profesor), quienes interactúan con la interfaz durante sesiones de treinta minutos. El Facilitador guía a los participantes a través de la sesión, planteando una serie de interrogantes que el grupo debe responder. El Facilitador vela por que cada participante logre una adecuada comprensión de cada concepto abordado, guiándolos a que encuentren las respuestas por sí mismos y estimulando la colaboración con sus pares. En ese sentido, el Facilitador nunca entrega la respuesta a la pregunta, sino que solo confirma la respuesta encontrada por los alumnos.

La sesión pedagógica está estructurada en base a un guión de 12 escenas, donde cada una abarca en forma muy puntual conceptos trigonométricos. El guión progresa desde lo más sencillo (ej. Eje Y de un plano cartesiano) hasta a lo más complejo (ej. Frecuencia y amplitud en funciones periódicas). El avance entre escenas es decidido por el profesor

una vez que haya validado que el grupo ha obtenido la comprensión de cada una. Los estudiantes también tienen la libertad de navegar escenas cuando así lo deseen, por ejemplo para volver atrás a revisar algo que les ayude a comprender la escena actual. El diseño de la experiencia permite que cada grupo avance a su propio ritmo y a la vez da flexibilidad para el que el Facilitador se enfoque más en ciertos aspectos dependiendo de la dinámica de cada grupo.



Figura 3. Sesiones con Prototipo 2, donde se aprecia a los participantes colaborando.

Un aspecto importante de la experiencia es que se evita intencionalmente el uso de lenguaje técnico. Esto tuvo la finalidad de generar un ambiente de relaxo en los estudiantes al alejarse del paradigma de la ecuación matemática, privilegiando así el lenguaje común y las representación gráfica. Esto fomentó el uso de metáforas para acceder a una comprensión básica de nociones abstractas de la matemática (Font et al., 2010). Por ejemplo, durante el primer tercio de la sesión, nunca se mencionan los términos “seno” y “coseno”, a pesar de que los participantes ya los han comprendido conceptualmente. A cambio, se les llama la “barra roja y la barra azul” en pos de primero lograr un entendimiento del significado de los conceptos antes de asociarlos a sus nombres técnicos. Esta práctica facilita que el estudiante pueda desprenderse de sus preconcepciones (muchas veces inexactas) e incorporar el nuevo conocimiento con menor resistencia (Ambrose et al., 2010).

Resultados de aprendizaje

El Pre-Test se fue realizado al inicio del proceso de la investigación, y fue aplicado a 199 estudiantes de primer año de Diseño e Ingeniería. Midió el conocimiento de conceptos básicos de trigonometría en base a lo que los estudiantes recordaban de su educación secundaria y excluyó medir habilidades matemáticas aplicadas (como la resolución de pro-

blemas matemáticos). Contó con 12 preguntas, donde cada una vale 1 punto. Al principio del test se incluyó una introducción para consensuar el conocimiento mínimo para poder responderlo. Los resultados fueron bajos: de 12 puntos total, en Ingeniería el promedio fue de 4.35 puntos (36% rendimiento), y en Diseño de 2.44 puntos (20% rendimiento).

Puntaje y rendimiento obtenido del Pre-Test en las carreras de Diseño e Ingeniería.

<i>Carrera</i>	<i>Puntaje</i>	<i>Rendimiento (%)</i>
Diseño (N=66)	2.44	20
Ingeniería (N=55)	4.35	36

Al analizar comparativamente ambas carreras se observa que tanto el rendimiento por pregunta como por módulo temático fue muy similar en ambas carreras, indicando que el set de 12 preguntas fue un instrumento adecuado para medir el conocimiento general en dos disciplinas distintas. El rendimiento global en Diseño fue más bajo que en Ingeniería, sin embargo, las dificultades comparativas por temas son coincidentes. Esto indica que el nivel de comprensión de conceptos básicos de trigonometría es transversalmente bajo. El Post-Test fue aplicado al final del proceso de investigación. Fue idéntico al Pre-Test y se utilizaron los mismos métodos de recolección y análisis de datos. El Post-Test fue rendido solo por el grupo Experimental (n=24, alumnos de Diseño e Ingeniería) quienes atendieron a dos sesiones con la interfaz. Adicionalmente, un grupo de Control de 16 alumnos de Diseño rindió el Post-Test sin participar en ninguna sesión con la interfaz y sin recibir instrucción formal.

Al comparar los resultados del Pre-Test y Post-Test se observó una mejoría significativa en el grupo Experimental. En Diseño, el incremento fue de 5.0 puntos (41%), mientras que en Ingeniería fue de 3.9 puntos (32.5%), entregando un incremento global de 4.46. Tanto en el Pre-Test como en el Post-Test, Ingeniería se mantuvo con un rendimiento superior a Diseño, lo que era esperable. La Tabla 2 muestra el rendimiento comparativo por pregunta en el Pre-Test y Post-Test para el grupo Experimental (considerando ambas carreras). Se puede observar que luego de pasar por dos experiencias con la interfaz, el rendimiento incrementó desde un 34.4% a un 71.6%, entregando un diferencial de +37.1%, indicando que la experiencia fue significativa para el aprendizaje.

Rendimiento promedio por pregunta en el grupo Experimental, comparando el Pre-Test y Post-Test

Pregunta	Rendimiento Pre-Test (%)	Rendimiento Post-Test (%)	Diferencial (%)
1	12.5	91.4	78.9
2	17.5	91.4	73.9
3	39.2	96.4	57.3
4	45.0	92.9	47.9
5	27.5	47.1	19.6
6	35.0	77.9	42.9
7	62.5	77.9	15.4
8	61.7	78.6	16.9
9	40.0	38.6	-1.4
10	18.3	65.7	47.4
11	30.8	70.7	39.9
12	23.3	30.0	6.7
Promedio	34.4%	71.6%	37.1%

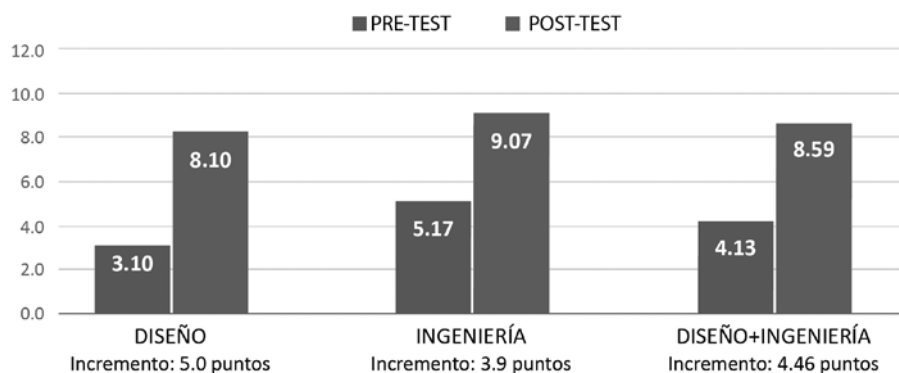


Figura 4. Rendimiento global promedio comparando Pre-Test y Post-Test en ambas carreras.

Conclusiones

La interfaz diseñada contribuye a validar los beneficios de las TUI como herramienta pedagógica para el aprendizaje de trigonometría. Los resultados cuantitativos obtenidos permiten constatar que efectivamente los participantes mejoraron su rendimiento. El análisis cualitativo de la data recogida en las sesiones de testeo informa que los estudiantes lograron comprender conceptos que antes no entendían, pudieron corroborar o cuestionar sus conocimientos previos, y aprendieron colaborativamente al usar la interfaz. Durante las sesiones de testeo se observó cómo los estudiantes fueron construyendo la experiencia de aprendizaje en base a lo que la interfaz les mostraba. Además fue muy interesante observar el proceso de co-creación de conocimiento entre participantes de diferentes disciplinas. Poder observar y escuchar sus discusiones fue fundamental como input para el proceso de diseño de la interfaz. El principio de desarrollar iterativamente la interfaz a través de un diseño participativo, balanceando retroalimentación de usuarios con observación para potenciar el diseño fue fundamental para lograr los objetivos de diseño propuestos.

Entre las variables consideradas por Jetter, Reiterer y Geyer (2014), para crear una interfaz natural, el foco principal estuvo puesto en la “interacción social” y la “jornada de usuario”. El diseño iterativo de la experiencia produjo como resultado sesiones dinámicas, las cuales fueron calificadas positivamente por los participantes. El estilo usado por el Facilitador jugó un rol fundamental: el uso de un lenguaje coloquial logró que los participantes actuaran sin miedo al error y fomentó la experimentación y el “aprender haciendo” (Kepceoğlu & Yavuz, 2016; Zengin, 2018). La filosofía constructivista, reflejada en la validación progresiva del entendimiento de los participantes durante la sesión, permitió que los participantes sintieran seguridad para incorporar contenido cada vez más complejo.

El uso de múltiples sentidos para transferir el contenido contribuyó a diversificar las vías de acceso a la información durante la experiencia de aprendizaje. El hecho de poder manipular físicamente los controladores en la interfaz, demostró ser beneficioso para que los estudiantes pudieran interiorizar conceptos abstractos en términos concretos (Lakoff & Núñez, 2000). Por ejemplo, girar el Anillo y ver cómo cambian el ángulo y los valores de seno y coseno, es una de las vías por las cuales lo abstracto se vuelve visible y controlable en forma concreta. El uso del sonido recibió bastante aceptación por parte de los participantes, ya que les ayudó a poner atención a aspectos relevantes en momentos clave y les entregó una vía adicional y novedosa de representar conceptos abstractos. Asimismo, el tener la libertad de poder repetir una acción las veces necesarias para comprender el fenómeno permitió a los participantes reflexionar y consensuar opiniones, dinamizando así el proceso de aprendizaje y haciéndolo más participativo.

Esto lleva a concluir que la interfaz propuesta, tiene el potencial de constituirse como una herramienta pedagógica que permite un acercamiento más intuitivo y exploratorio al aprender trigonometría. Al apelar más al entendimiento de los conceptos y menos a la aplicación directa a través del problema matemático, pensamos que la interfaz puede ser un buen aliado en las fases iniciales del aprendizaje de trigonometría, facilitando la entrada a las dimensiones más abstractas necesarias para desarrollar habilidades matemáticas más avanzadas.

Referencias

- Ambrose, S., Bridges, M., Dipietro, M., Lovett, M., & Norman, M. (2010). Seven Research-Based Principles for Smart Teaching (Vol. 48). <https://doi.org/10.1002/mop.21454>
- Bravo, U. (2016). Visual analogies: representation of the design process and its application in the field of education. *Base Diseño e Innovación*, 2, 42-49.
- Brown, S. A. (2006). The trigonometric connection: Students' understanding of sine and cosine. In *Proceedings of 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1.
- Camilleri, M. A., & Camilleri, A. C. (2017). Digital Learning Resources and Ubiquitous Technologies in Education. *Technology, Knowledge and Learning*, 22(1), 65-82. <https://doi.org/10.1007/s10758-016-9287-7>
- Chin, J. P., Diehl, V. A., & Norman, L. K. (1988). Development of an instrument measuring user satisfaction of the human-computer interface. *Proceedings of the SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems - CHI '88*. <https://doi.org/10.1145/57167.57203>
- Council, D. (2014). *Innovation by Design*. Customer Relationship Management, p. 23. Design Council.
- Curri, E. (2012). Using Computer Technology in Teaching and Learning Mathematics in an Albanian Upper Secondary School: The Implementation of SimReal in Trigonometry Lessons. *Universitetet i Agder; University of Agder*.
- De Raffaele, C., Smith, S., & Gemikonakli, O. (2018). An Active Tangible User Interface Framework for Teaching and Learning Artificial Intelligence. *Proceedings of the 2018 Conference on Human Information Interaction & Retrieval - IUI '18*, 535-546. <https://doi.org/10.1145/3172944.3172976>
- Dockendorff, M., & Solar, H. (2018). ICT integration in mathematics initial teacher training and its impact on visualization: the case of GeoGebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(1), 66-84. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1341060>
- Dodge, E., & Lakoff, G. (2005). Image schemas: From linguistic analysis to neural grounding. *From Perception to Meaning: Image Schemas in Cognitive Linguistics*, 57-91.
- Driscoll, M. P. (2000). *Psychology of learning for Instruction* (2nd ed.). Allyn & Bacon.
- Dumas, J. S., & Redish, J. (1999). *A practical guide to usability testing*. Intellect books.
- Font, V., Bolite, J., & Acevedo, J. (2010). Metaphors in mathematics classrooms: Analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 131-152. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9247-4>
- Gentner, D., & Nielson, J. (1996). Anti-Mac Interface. *Communications of the ACM*, 39(8), 70-82. <https://doi.org/10.1145/232014.232032>
- Hollan, J., Hutchins, E., & Norman, D. (1985). Direct manipulation interfaces. *Human-Computer Interaction*, 1, 311-338.
- Hornecker, E., & Buur, J. (2006). Getting a grip on tangible interaction. *Proceedings of the SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems - CHI '06*, 437-446. <https://doi.org/10.1145/1124772.1124838>
- Houde, S., & Hill, C. (1997). What do Prototypes Prototype? *Handbook of Human-Computer Interaction*, 367-381. <https://doi.org/10.1016/B978-044481862-1.50082-0>

- Ishii, H., & Ullmer, B. (1997). Tangible Bits: Towards Seamless Interfaces Between People, Bits and Atoms. *Proceedings of the ACM SIGCHI Conference on Human Factors in Computing Systems*, 234-241. <https://doi.org/10.1145/258549.258715>
- Jetter, H. C., Reiterer, H., & Geyer, F. (2014). Blended Interaction: Understanding natural human-computer interaction in post-WIMP interactive spaces. *Personal and Ubiquitous Computing*, 18(5), 1139-1158. <https://doi.org/10.1007/s00779-013-0725-4>
- Johnson, M. (2013). *The body in the mind: The bodily basis of meaning, imagination, and reason*. University of Chicago Press.
- Kepceoğlu, I., & Yavuz, I. (2016). Teaching a concept with GeoGebra: Periodicity of trigonometric functions. *Educational Research and Reviews*, 11(8), 573-581. <https://doi.org/10.5897/err2016.2701>
- Lakoff, G. (2009). *The Neural Theory of Metaphor*. Ssrn. <https://doi.org/10.2139/ssrn.1437794>
- Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being* (1st ed.). New York, NY, USA: Basic Books.
- Marshall, P. (2007). Do tangible interfaces enhance learning? *Proceedings of the 1st International Conference on Tangible and Embedded Interaction*, 163-170. <https://doi.org/10.1145/1226969.1227004>
- Mesa, V., & Goldstein, B. (2016). Conceptions of Angles, Trigonometric Functions, and Inverse Trigonometric Functions in College Textbooks. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 3(2), 338-354. <https://doi.org/10.1007/s40753-016-0042-1>
- Mushipe, M., & Ogbonnaya, U. I. (2019). Geogebra and Grade 9 Learners' Achievement in Linear Functions. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (IJET)*, 14(08), 206-219. <https://doi.org/10.3991/ijet.v14i08.9581>
- Pecher, D., Boot, I., & Van Dantzig, S. (2011). Abstract Concepts: Sensory-Motor Grounding, Metaphors, and Beyond. *Psychology of Learning and Motivation*, 54, 217-248. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385527-5.00007-3>
- Resnick, M., Myers, B., Nakakoji, K., Shneiderman, B., Pausch, R., Selker, T., & Eisenberg, M. (2005). *Design Principles for Tools to Support Creative Thinking*. NSF Workshop Report on Creativity Support Tools, (Creativity Support Tools), 25–35.
- Scarlato, L. (2002). An application of tangible interfaces in collaborative learning environments. *SIGGRAPH '02*, 125-126. <https://doi.org/10.1145/1242073.1242141>
- Shaer, O., & Hornecker, E. (2010). Tangible User Interfaces: Past, Present, and Future Directions. *Foundations and Trends® in Human-Computer Interaction*, 3(1-2), 1-137. <https://doi.org/10.1561/1100000026>
- Skinner, B. F. (1976). *About Behaviorism*. Vintage.
- Thompson, P. W., Carlson, M. P., & Silverman, J. (2007). The design of tasks in support of teachers' development of coherent mathematical meanings. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4–6), 415-432. <https://doi.org/10.1007/s10857-007-9054-8>
- Vygotsky, L. S. (1980). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard university press.
- Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 17(3), 91-112. <https://doi.org/10.1007/BF03217423>

Zengin, Y. (2018). Incorporating the dynamic mathematics software GeoGebra into a history of mathematics course. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(7), 1083-1098. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1431850>

Abstract: In mathematics education, studies reveal difficulties in the teaching-learning of trigonometry in secondary and higher education, where students are not encouraged to achieve a deep conceptual understanding of the associated concepts. Considering the importance of trigonometry for multiple disciplines, it becomes necessary to implement new approaches that foster students to take an active role in their own learning. Several studies demonstrate that incorporating digital technologies have a positive impact on students' learning. However, most of the existing technologies do not consider the use of the body and multiple senses. Tangible User Interfaces (TUIs) in contrast, can host bodily interactions that apply principles of the Embodied Cognition Theory. Nonetheless, there is a lack of applications of TUIs for trigonometry education. This study consisted in designing and validating a tangible interface for the teaching-learning of basic concepts of trigonometry. The interface hosts a pedagogical experience that privileges exploration, the use of intuition, and fosters collaborative learning. A Pre-Test was applied to 119 students to determine previous knowledge, yielding a 29.1% performance. After two interventions with the interface, the results of a Post-Test reveal an increase of 37.1%, confirming the educational effectiveness of the interface and the pedagogical experience to facilitate learning of basic concepts of trigonometry.

Keywords: trigonometry - interaction design - tangible user interface – learning – embodied cognition.

Resumo: No ensino de matemática, os estudos mostram dificuldades e desafios no ensino-aprendizagem da trigonometria no ensino médio e superior, onde o aluno não é incentivado a obter uma profunda compreensão conceitual dos conceitos. Considerando a sua relevância para várias disciplinas, é necessário implementar novas abordagens ao seu ensino, onde é privilegiado um papel ativo do aluno em sua própria aprendizagem. Vários estudos mostram que a incorporação de tecnologias digitais influencia positivamente a aprendizagem dos alunos, no entanto, a maioria das tecnologias existentes responde ao paradigma da interação tradicional com um computador, onde o uso do corpo e dos múltiplos sentidos não é considerado. As interfaces tangíveis (UIS), por outro lado, podem abrigar interações corporais, fornecendo um tributo direto à teoria da cognição corporal. No entanto, existe uma lacuna na aplicação da TUI para o ensino de trigonometria. Esta pesquisa consistiu em projetar e validar uma interface tangível para o ensino-aprendizagem da trigonometria inicial. A interface abriga uma experiência de aprendizado que privilegia a exploração, o uso da intuição e promove o aprendizado colaborativo. Foi realizado um pré-teste de diagnóstico com 119 alunos para determinar o conhecimento prévio, com um rendimento médio de 29,1%. Após duas intervenções com a interface proposta,

os resultados de um pós-teste mostram um aumento de 37,1% no desempenho, o que valida a eficácia pedagógica da interface e a experiência pedagógica na aprendizagem de conceitos básicos de trigonometria.

Palavras chave: trigonometria - design de interação - aprendizagem - interfaces tangíveis - cognição corporal.

[Las traducciones de los abstracts fueron supervisadas por el autor de cada artículo]
