

Un modelo matemático en el proceso de corte unidimensional de materiales

(A mathematical model for the process of one-dimensional cutting of materials)

Narciso Rubén De León Rodríguez,ⁱ Juan Felipe Medina Mendietaⁱⁱ
& Ernesto Roberto Fuentes Garfíⁱⁱⁱ

Resumen

La investigación fue realizada con el objetivo de utilizar métodos matemáticos asociados a las técnicas de computación para establecer los planes de corte unidimensionales de materiales en industrias que, de una forma u otra, se ven involucradas en esta actividad durante el desarrollo del proceso productivo.

El modelo matemático establecido tiene presente la minimización de los desperdicios, la disponibilidad de materia prima y la cantidad de unidades a cortar por tipo de pieza. Un sistema informático habilitado a tales efectos permite de forma automática, a partir de datos primarios ofrecidos por el usuario, modelar la situación en estudio, procesar el modelo matemático correspondiente e interpretar la solución del mismo (o sea, presentar el plan de corte unidimensional de materiales).

Lo expresado en el párrafo anterior ha sido puesto en práctica para distintas entidades productivas con resultados favorables en todos los sentidos, lo que permite afirmar que los planes de corte unidimensionales de materiales pueden ser elaborados vinculando la modelación matemática con la utilización de paquetes de programas computacionales.

El informe de resultados, artículo científico correspondiente, puede convertirse en un documento de consulta que ofrece una forma no muy usual en la dirección de los procesos de corte unidimensional de materiales en la industria. El interesado, al consultarlo, podrá apreciar cómo se puede influir significativamente en el ahorro de materia prima con un nivel superior en la organización y control del trabajo de la entidad productiva, e incluso, conocer una forma de modelar matemáticamente

ⁱ Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. rdleon.rodriguez@gmail.com

ⁱⁱ Universidad de Cienfuegos de Cuba, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. jfelipemm@ucf.edu.cu

ⁱⁱⁱ Universidad Metropolitana del Ecuador, Facultad de Ingeniería. rfgar99@gmail.com

un problema de este tipo, con información sobre el soporte computacional y la interpretación de los resultados para preparar el plan de producción.

Palabras Clave: modelo matemático, corte unidimensional de materiales.

Abstract

The research was conducted with the aim of using mathematical methods associated with computing techniques to establish one-dimensional cutting plans of materials in industries which, in one way or another, are involved in this activity during the development of production process.

The report of results, as presented in the current scientific article, can become a discussion document that offers an uncommon way of directing the one-dimensional cutting plans of materials in industries. When consulting, it can be appreciated how someone can significantly influence in the saving of raw material with an interesting level in the organization and control in the production entity, and even to know a way of mathematically modeling this type of problem, with information on the computational support and interpretation of the results to prepare the production strategy.

The established mathematical model takes into account the minimizing of waste, the availability of raw materials and the number of units to be cut according to the type of part. A computer system intentionally enabled allows automatically, taking into account primary data provided by the user, to model the situation under review, to process the correspondent mathematical example and interpret solution (that is, submitting a plan of one-dimensional cutting materials).

As stated in the previous paragraph this proposal has been implemented into various production entities showing favorable results in every way, allowing stating that the one-dimensional cutting plans of materials can be made by linking mathematical modeling with the use of computer-programs packages.

Keywords: mathematical model, one-dimensional cutting.

1. Introducción

El corte unidimensional de materiales se presenta como un proceso frecuente y común en la industria. Frecuente por la forma sistemática con que se puede presentar y común porque muchas industrias se involucran en esta actividad durante el desarrollo del proceso de producción.

En el proceso de corte unidimensional (se considera una sola dimensión al

momento de realizar el corte) de materiales aparecen tres elementos fundamentales: materia prima (material primario donde se realiza el corte), pieza (elemento a cortar a partir de la materia prima) y variante de corte (forma de combinar las piezas en la materia prima al realizar el corte, también se le llama patrón de corte). La figura 1 muestra a través de un esquema los tres elementos fundamentales del corte unidimensional de materiales (Hideki, 1998).

A partir de lo expresado en los dos párrafos anteriores y después de constatar la forma en que se realiza el proceso de corte unidimensional de materiales en varias entidades productivas involucradas en esta tarea se pudo verificar que unas lo hacen de forma empírica (a partir de la experiencia práctica de las personas que realizan la actividad) y otras por sistemas computarizados preestablecidos. En el primer caso no aparece un control efectivo del proceso y en el segundo no siempre hay complacencia con los resultados económicos obtenidos.

Lo comentado anteriormente conduce al desarrollo de la investigación definiendo como problema científico el siguiente: ¿cómo influir positivamente en el proceso de corte unidimensional de materiales a través de la utilización de métodos matemáticos asociados a las técnicas de computación?

La respuesta preliminar fue la que sigue: modelando matemáticamente la situación correspondiente y procesando el modelo matemático obtenido a través de un sistema informático (Gracia, 2010).

Los objetivos de la investigación fueron delimitados de la forma que se presenta a continuación:

Objetivo general: Desarrollar un sistema informático (que integre la modelación matemática del problema, el procesamiento computacional del modelo matemático y la interpretación económica de la solución) para ser utilizado en la optimización del proceso de corte unidimensional de materiales en la industria.

Objetivos específicos:

1. Caracterizar el objeto de investigación a partir del análisis del proceso productivo de algunas industrias involucradas en el corte unidimensional de materiales.
2. Analizar teóricamente, desde el punto de vista matemático y a través de la consulta bibliográfica correspondiente, la forma de modelar los procesos de corte unidimensional de materiales.
3. Obtener una forma general de modelar matemáticamente el proceso de corte unidimensional de materiales teniendo presente la caracterización realizada del objeto de investigación.
4. Implementar la modelación matemática realizada teniendo presente la utilización de sistemas informáticos.
5. Validar los resultados a través de la comparación económica (antes, y después de utilizar métodos matemáticos asociados a técnicas de computación).

Observación: En la figura 1 que parece a continuación se presenta un gráfico ilustrativo con los tres elementos fundamentales que se tienen presente en el trabajo de investigación desarrollado para la modelación matemática del corte unidimensional de materiales.

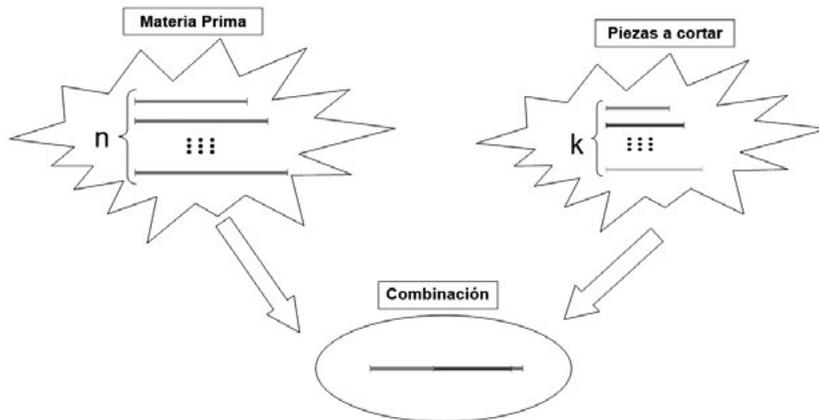


Figura 1. Gráfico con los tres elementos fundamentales del corte unidimensional de materiales.

En los aspectos siguientes se presentan el método utilizado (hasta llegar al modelo matemático general correspondiente a la situación en estudio) y los resultados principales de la investigación asociados al análisis de un ejemplo (caso particular real del corte de barras de acero en una industria) utilizando el sistema informático habilitado en función de la modelación, procesamiento del modelo e interpretación de la solución.

2. Método

El método utilizado durante el desarrollo de la investigación se fundamenta en las seis fases fundamentales de la metodología de la modelación matemática: planteamiento del problema; construcción del modelo; prueba del modelo; obtención de la solución; prueba de la solución; aplicación a la práctica y el establecimiento de controles sobre la solución.

Es importante señalar que la investigación de cualquier problema, al cual se quiere aplicar la modelación matemática, debe comenzar con el planteamiento del mismo, aunque por lo general la segunda fase comienza sin que la primera haya sido concluida. Es posible que el planteamiento original de un problema se vaya modificando en la medida que se resuelve (De Armas, 2014). En ocasiones, incluso, una vez obtenida una solución, hay que replantearse el problema. Lo expresado

anteriormente no estuvo ausente en esta investigación.

Después de planteado el problema de investigación el análisis comienza a partir del modelo matemático de Kantorovich que se presenta a continuación en la ecuación 1 (Artemenko y Portela, 1990).

$$\text{MIN } Z = \sum_{j=1}^n C_j X_j \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} X_j = b_i \quad ; \quad i = 1; \dots; m.$$

$$X_j \geq 0 \quad ; \quad X_j \in Z; j = 1; \dots; n.$$

Donde:

n: Cantidad de variantes de corte.

m: Cantidad de tipos de piezas.

j: Índice de la variante de corte.

i: Índice de la pieza.

b_i: Necesidad de piezas tipo “i”.

C_j: Costo unitario de la variante de corte “j”.

A_{ij}: Cantidad de piezas tipo “i” producidas al utilizar la variante de corte “j”.

X_j: Cantidad de veces que se utiliza la variante de corte “j”.

Z: Conjunto de los números enteros.

Modelo 1 matemático de Kantorovich

Al modelar situaciones prácticas a través del modelo matemático anterior, sustituyendo al costo (C_j) por el desperdicio de materia prima según la variante de corte correspondiente, aparecen resultados de incompatibilidad en la solución por la presión que ejerce la igualdad (en el primer grupo de restricciones) y esto trae la necesidad de modelar el problema de la forma que se presenta a continuación en la ecuación 2.

$$\text{MIN } \text{DMP} = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} d_{jk} X_{jk} \quad (2)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} P_{ijk} X_{jk} \geq N_i \quad ; \quad i = 1; \dots; m.$$

$$\sum_{j=1}^{n_k} X_{jk} \leq Q_k \quad ; \quad k = 1; \dots; r.$$

$$X_{jk} \geq 0$$

Donde:

n: Cantidad de variantes de corte.

m: Cantidad de piezas.

r: Cantidad de dimensiones de materia prima.

Q_k: Cantidad de unidades de materia prima de dimensión “k”.

j: Índice de la variante de corte.

i: Índice de la pieza.

k: Índice del tipo de materia prima.

N_i: Necesidad de piezas tipo “i”.

DMP: Desperdicio de materia prima.

d_{jk}: Desperdicio de materia prima tipo k según la variante de corte “j”.

P_{ijk}: Cantidad de piezas tipo “i” que se obtienen al cortar una unidad de materia prima de dimensión k según la variante de corte “j”.

X_{jk}: Cantidad de materia prima de dimensión “k” que es necesario cortar según la variante de corte “j”.

n_k: Cantidad de variantes de corte para la materia prima “k”.

Modelo 2 matemático mejorado

Al estudiar situaciones prácticas a través del modelo matemático anterior se logra la compatibilidad, pero aparecen sobrantes desmesurados por tipo de pieza, que desde el punto de vista económico, es algo no deseado y surge la necesidad de modelar el problema de la forma que se presenta a continuación en la ecuación 3.

$$\text{MIN } DMP = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} d_{jk} \cdot x_{jk} + \sum_{u=n+1}^{n+t+1} b_u \cdot x_u \quad (3)$$

Sujeto a:

$$\sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} P_{ijk} \cdot x_{jk} + \sum_{u=n+1}^{n+t+1} a_{iu} \cdot x_u = N_i \quad ; \quad i = 1; \dots; m$$

$$\sum_{j=1}^{n_k} x_{jk} \leq Q_k \quad ; \quad k = 1; \dots; r$$

$$x_{jk} \geq 0 \quad ; \quad x_{jk} \in Z \quad ; \quad j = 1; \dots; n$$

$$x_u \geq 0 \quad ; \quad x_u \in Z \quad ; \quad u = n+1; \dots; n+t+1$$

$$\left(n = \sum_{k=1}^r n_k \right)$$

Donde:

n: Cantidad de variantes de corte.

m: Cantidad de piezas a cortar.

r: Cantidad de tipos de longitudes de materia prima.

Q_k: Cantidad de unidades de materia prima de longitud tipo “k”.

j: Índice de la variante de corte.

i: Índice de la pieza.

k: Índice del tipo de longitud de la materia prima.

N_i: Necesidad de piezas tipo “i”.

DMP: Desperdicio de materia prima.

d_{jk}: Desperdicio de materia prima de longitud tipo “k” según la variante de corte “j”.

P_{ijk}: Cantidad de piezas tipo “i” que se obtienen al cortar una unidad de materia prima de longitud tipo “k” según la variante de corte “j”.

x_{jk}: Cantidad de materia prima de longitud tipo “k” que es necesario cortar según la variante de corte “j”.

Z: Conjunto de los números enteros.

u: Índice de la variante de sustitución.

t: Cantidad de variantes de sustitución.

x_u: Cantidad de veces a utilizar la variante de sustitución “u”.

b_u: Desperdicio de materia prima generado por la variante de sustitución “u”.

a_{iu}: Coeficiente de utilización de la pieza tipo “i” en la variante de sustitución “u”.

n_k: Cantidad de variantes de corte para la materia prima de longitud tipo “k”.

Modelo 3 matemático definido en la investigación

El modelo matemático anterior es el resultado teórico más importante de esta investigación y por ello se detalla a continuación la metodología diseñada para la construcción del mismo en cada situación particular.

Metodología para la construcción del modelo (De León, 1996).

1. Obtener las variantes de corte para cada tipo de materia prima teniendo presente la longitud de cada una de ellas (**L_k**) y el tamaño de las piezas a cortar.
2. Obtener las variantes de sustitución de piezas. Buscar las variantes de corte tomando hipotéticamente y de forma sucesiva las “**m-1**” mayores piezas como materia prima y las restantes, más pequeñas que esta, como elementos a cortar. Formar las variantes de sustitución a partir de estas y ubicando el elemento “**-1**” en el lugar correspondiente a la pieza tomada como materia prima.
3. Formar la matriz compuesta por las variantes de corte (correspondientes a cada materia prima) y las variantes de sustitución.
4. Determinar las variantes de corte que pueden ser expresadas como la suma de una variante de corte y una variante de sustitución.

5. Determinar las variantes de sustitución que pueden ser expresadas como la suma de dos variantes de sustitución.
6. Plantear la matriz cuyas filas están formadas por las “**n**” variantes de corte y las “**t**” variantes de sustitución no comprendidas, respectivamente, en los dos casos anteriores. Incorporar también en esta matriz una fila con ceros en el lugar correspondiente a las “**m-1**” mayores piezas, “**-1**” para la pieza más pequeña y la longitud de esta última como desperdicio. La incorporación final antes mencionada se considera hipotéticamente como variante de sustitución en la formulación general del modelo.
7. Construir el modelo general teniendo en consideración las columnas de la matriz obtenida en el paso anterior para formar la función objetivo y las restricciones de necesidad de piezas. Las restricciones de disponibilidad de las “**r**” tipos de materia prima se forman a partir de las variables (variantes de corte) respectivamente correspondientes a cada una de ellas.

3. Análisis de resultados

El resultado práctico fundamental es la obtención de un sistema informático que integra en un solo producto la generación de variantes de corte y de sustitución, la eliminación de variantes de corte dependientes (consideradas en los aspectos 4 y 5 de la metodología para la construcción del modelo), la modelación matemática del problema (según el modelo presentado en la figura 4), el procesamiento computacional del modelo matemático (fue programado el método Branch and Bound o Ramificación y Acotamiento) y la interpretación económica de la solución.

Lo planteado en el párrafo anterior se puede resumir diciendo que el usuario (cliente del sistema) introduce los datos, longitud de materia prima; longitud de las piezas a cortar; cantidad de materia prima en existencia y después del correspondiente procesamiento tiene a su disposición en forma literal el plan de corte a ejecutar.

Los resultados fueron implementados y validados satisfactoriamente en varias entidades productivas vinculadas al corte unidimensional de materiales.

En el ejemplo (correspondiente al corte de acero en una entidad productiva) que aparece a continuación se presenta (a través de la figura 5) el momento inicial al utilizar el sistema informático para modelar, procesar e interpretar la solución del modelo, y tener después el plan de corte preestablecido por esta vía (Medina, 2010).

Figura 2. Introducción de datos.

En un primer momento el usuario debe conocer si dispone de uno o varios tipos de materia prima para ejecutar la tarea de corte. En el caso presentado se selecciona la opción “varias materias primas”, y como se observa en la figura 5 se introduce la longitud de cada una de ellas y la cantidad disponible [si se considera que debe tenerse en cuenta por estar significativamente limitada; en caso contrario se obvia como sucede en el ejemplo con la de longitud 12 m (metros)]. También se introduce, como se puede apreciar en la parte derecha de la figura 5, la longitud de cada pieza a cortar y la cantidad que se necesita de cada una de ellas. La figura 5 muestra entre paréntesis las cantidades.

Después de introducir los datos primarios (materia prima y piezas a cortar) aparecen un grupo de opciones que ofrece el sistema informático según los intereses del usuario. Pueden ser visualizados, entre otros, los elementos siguientes:

- Variantes de corte. En el caso analizado son 125 distribuidas de la forma siguiente: 26 para la materia prima 1; 40 la 2; 49 la 3; y 10 variantes de sustitución (tratadas en el aspecto 2 de la metodología). Al final se reducen a 15 variables en el modelo por ser dependientes las restantes (aspecto 6 de la metodología).
- El modelo matemático correspondiente (caso particular del modelo general) a la situación en estudio.
- La solución óptima del modelo matemático.
- El reporte práctico preliminar. Aquí aparece de forma resumida toda la información relacionada con el proceso de corte a realizar: materia prima; piezas a cortar; forma de realizar el corte; desperdicio total de materia prima con el por ciento correspondiente.

El resultado práctico integrador de la investigación puede ser definido como el reporte preliminar detallado en el párrafo anterior y presentado en la figura 6 para el caso analizado como ejemplo.

Tabla 1. Informe preliminar sobre plan de corte a ejecutar.

Materia prima disponible por tipo (longitud) y cantidad	
Longitud	Cantidad
12,00 m	no limitada
10,50 m	80
9,00 m	100

Pieza a cortar por tipo (longitud) y cantidad	
Longitud	Cantidad
3,43 m	20
3,36 m	35
3,34 m	47
2,10 m	30
1,70 m	34

Materia prima a utilizar en el corte por tipo (longitud) y cantidad	
Longitud	Cantidad
12,00 m	4
10,50 m	40

Forma de ejecutar el corte
Cortar 4 unidades de 12,00 m de la siguiente forma: 3 piezas de 3,43 m; 1 pieza de 1,70 m.
Cortar 10 unidades de 10,50 m de la siguiente forma: 3 piezas de 3,43 m.
Cortar 30 unidades de 10,50 m de la siguiente forma: 1 pieza de 3,36 m; 1 pieza de 3,34 m; 1 pieza de 2,10 m; 1 pieza de 1,70 m.
Cortar 22 unidades de 3,43 m de la siguiente forma: 1 pieza de 3,36 m.
Cortar 17 unidades de 3,36 m de la siguiente forma: 1 pieza de 3,34 m.

Observación final
Desperdicio de materia prima 4,02 m.
Por ciento de desperdicio de materia prima 0,86.

4. Conclusiones

Desde el punto de vista económico es indiscutible la importancia de utilizar métodos matemáticos asociados a las técnicas de computación en la dirección del proceso de corte unidimensional de materiales. Los resultados más importantes en este sentido se resumen a continuación:

- Incidencia significativa en la gestión económica de la empresa por el ahorro de materia prima y su equivalencia en dinero al optimizar el proceso de corte en la entidad. El sistema integra la modelación matemática (minimiza desperdicios de materia prima, satisface las necesidades por tipo de pieza a cortar y tiene presente la existencia de materia prima) del problema, el procesamiento computacional del modelo matemático y la interpretación económica de la solución óptima. Permite, a partir de elementales conocimientos informáticos, elaborar el plan de corte de materiales. El usuario (cliente del sistema) introduce los siguientes datos: longitud de materia prima; longitud de las piezas a cortar; cantidad de materia prima en existencia y después del correspondiente procesamiento tiene a su disposición en forma literal el plan de corte a ejecutar.
- Influencia positiva en la organización y control del trabajo en el área de corte de materiales, el plan de corte no tiene que ser preparado de forma empírica porque se conoce con anterioridad la cantidad de materia prima a utilizar, la forma de realizar el corte y el desperdicio que se tendrá.

5. Referencias

- Artemenko, V. K. y Portela, J. M. (1990). *Modelo Económico - Matemático*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.
- De Armas, J. (2013). *Problemas de corte: métodos exactos y aproximados para formulaciones mono y multi-objetivo* (Tesis doctoral). Universidad de La Laguna, España. Recuperado a partir de <https://riull.ull.es/xmlui/handle/915/3196>
- De León, N. R. (1996). *Métodos matemáticos en la dirección de los procesos de corte de materiales* (Tesis de maestría). Universidad de Cienfuegos, Cienfuegos, Cuba.
- Gracia C. (2010). *Métodos y Algoritmos para resolver problemas de Corte unidimensional en entornos realistas. Aplicación a una empresa del Sector Siderúrgico*. (Tesis doctoral). Universidad Politécnica de Valencia, España.

Recuperado a partir de <https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/7530/tesisUPV3250.pdf>

Hideki, H. (1998). *Industrial Applications of Combinatorial Optimization* (Vol. 16). Gang Yu. Recuperado a partir de <https://www.springer.com/la/book/9780792350736>

Medina, J. F. (2010). *Optivacortuni, sistema informático para resolver problemas de optimización en el proceso de corte de materiales* (Tesis de Maestría). Universidad de Cienfuegos, Cienfuegos, Cuba.