

autora no desenvolvimento da matéria Biologia, em diferentes cursos de primeiro ano do nível médio da Cidade de Buenos Aires.

**Palavras chave:** vídeo - exposição - tempo - sala de aula - aprendizagem - motivação

(\*) **María Lucía Lopetegui.** Profesora en Biología, egresada del Instituto Superior del Profesorado “Joaquín V. González” (2010). Licenciada en Ciencias de la Educación, egresada de la Universidad de Morón (2013).

---

## Herramientas de seguimiento ocular y el aprendizaje de la geometría

Fecha de recepción: agosto 2016  
Fecha de aceptación: noviembre 2016  
Versión final: marzo 2017

Claudio A. López (\*)

**Resumen:** La combinación de texto y diagramas con que se exponen ciertas demostraciones geométricas en el nivel medio de educación, sobrecargan en muchos casos los recursos perceptuales y cognitivos de los alumnos. La tecnología de seguimiento ocular ayuda a considerar otras representaciones que acceden al mismo objeto matemático con mayor eficiencia sin perder el rigor lógico excluyente de la disciplina.

**Palabras clave:** seguimiento ocular – geometría

[Resúmenes en inglés y portugués en la página 102]

---

### Introducción

Para el curso de Matemática Aplicada de la Escuela Técnica 31 (CABA) se adoptó como estrategia de motivación para el aprendizaje de la matemática la detección de intervenciones o fraudes sobre fotografía digital, transponiendo una versión del procesamiento digital de imágenes adecuada a los conocimientos previos de los estudiantes. Esta disciplina científica hace un uso casi excluyente de matemáticas muy complejas pero como contrapartida sus algoritmos de aplicación son conceptualmente asequibles, lo que permitía un cambio de registro fluido entre el pensamiento computacional al matemático. Tanto al tratar la detección facial como la corrección del efecto de ojos rojos terminamos explorando las geometrías que posibilitan las técnicas de seguimiento ocular o “*eye tracking*”, y es lo que derivó en esta investigación.

Si bien la asignatura considera la matemática como herramienta de apoyo a la interpretación de hechos físicos, se necesitaba que los alumnos reconocieran el porqué de este supuesto y para ello era necesario que comprendieran el concepto de demostración matemática. Es importante destacar que la elección de un curso de fotografía, con independencia de la necesidad de manifestación artística y a riesgo de generalizar, conlleva una notable presencia de inteligencias espaciales en gran parte del alumnado, lo que dificulta el despliegue de estrategias de enseñanza que faciliten la comprensión de demostraciones elementales con base discursiva, por ejemplo: porqué existen innumerables números primos. En cambio esta posición mejoraba cuando se trabajaban

demostraciones con base geométrica, no sin dificultades en el manejo de las referencias cruzadas simbólicas entre el texto y los diagramas.

En un intento de optimizar la correspondencia entre el material presentado y las habilidades y estrategias intelectuales de los alumnos se incorpora el uso del color como medio para reducir la distancia entre los registros visuales y textuales.

### Euclides y el color

En 1847 Oliver Byrne, ingeniero civil y profesor de matemática nacido en Irlanda publica los primeros 6 libros de los Elementos de Euclides (Byrne, 2010) pero con la radical innovación del uso del color sobre hermosas representaciones visuales que quedaron como parte inseparable de los teoremas. Heredero intelectual de Pestalozzi, produce esta obra maestra de diseño luego de sentirse frustrado como docente obligado a usar los métodos instruccionales de su época. La obra no fue tomada en serio por sus contemporáneos y en la actualidad sigue siendo considerada una rareza pero lentamente revalorizada a la luz de los avances en psicología cognitiva sobre el pensamiento visual. Byrne nunca tuvo la intención de usar los colores como entretenimiento sino como un medio pedagógico que ayudará a retener las ideas matemáticas poniendo su acento en lo plástico. Según el propio autor este enfoque le permitió que sus estudiantes aprendieran los Elementos de Euclides en menos de un tercio del tiempo que usualmente se requería, y haciendo que fuese el aprendizaje de conceptos lógicos mucho más duraderos.

Siguiendo la línea de Byrne tampoco intentamos utilizar al color como un método de captar la atención de los alumnos haciendo que diagramas complejos sean más atractivos, simplemente valoramos su uso como resaltador de la información que consideramos relevante en una demostración y las relaciones entre sus componentes. Tampoco desconocemos los cambios iniciados a partir del siglo XIX en pos de la formalización y la consecuente desconfianza en las ayudas visuales.

Un diagrama bien diseñado debe proveernos de dos tipos de información: semántica a través del texto y espacial por medio de la configuración de los componentes. El trabajo de Byrne consistió en un delicado equilibrio de reemplazo de las etiquetas textuales por colores cuidando que no se produjera una obstrucción en la fluidez de los agrupamientos visuales. Esto de ningún modo invalida el uso de etiquetas textuales cuando sirvan como medio facilitador de correspondencias entre un diagrama complejo actual y su exposición textual detallada. Creemos que la única forma de acceder a los objetos matemáticos es a través de signos y representaciones semióticas. Accedemos a una función a través de su ecuación, de una tabla o de su gráfica. Se necesita de una competencia especial para transformar las representaciones de un registro a otro, o incluso dentro del mismo registro.

En sintonía con los antiguos geómetras griegos, el topógrafo inglés identificaba la imaginación geométrica con una especie de recipiente sobre el cual el pensamiento discursivo proyecta sus determinaciones conceptuales, no estando limitado al rol pasivo de ilustración.

### Euclides y la electrónica

Al seguimiento ocular podemos sintetizarlo como el registro del movimiento del ojo mientras un participante examina un estímulo visual. Aunque identificar morfológicamente la pupila a lo largo del tiempo pueda parecer geoméricamente sencillo, se trata de un complejo proceso de adquisición y procesamiento de datos que intenta responder con cierta aproximación, entre otros, los siguientes interrogantes: hacia donde estamos mirando y por cuánto tiempo lo hacemos.

A la zona de interés la llamaremos fijación; la duración de la fijación se refiere a la cantidad de tiempo en que una persona lectora del estímulo permanece en una zona determinada antes de pasar a otra zona. Un mayor tiempo de fijación es indicador de un proceso de decodificación más complejo del participante.

Otra variable a registrar es el tiempo entre dos fijaciones sucesivas, expuesta como un movimiento rápido de los ojos o "saccade" en inglés (consideramos que "sacudida ocular" no es un término adecuado por lo que usamos las siglas MRO). Tiempos largos de MRO indican que el material es de lectura fácil para el participante.

La aproximación de medición a la que hacíamos referencia es consecuencia de tolerancias inherentes al dispositivo de captura de imagen, ya que como toda cámara posee una resolución espacial y temporal limitada, muy dependiente del costo del dispositivo, que en nuestro caso corresponden a una zona de interés de 5 grados como mínimo y un tiempo de media décima

de segundo, por lo que la transición entre un pequeño símbolo y el siguiente puede no ser percibido, como tampoco tiempos menores al citado.

En su forma material este dispositivo electrónico se presenta bajo dos formas: una montura similar a la de cualquier anteojos más un par de cámaras (relativamente invasivo, ya que bloquea parcialmente el campo visual del que lo usa) y otro externo al usuario que se monta sobre o bajo el borde de la pantalla de una PC y consta de dos cámaras. En ambos casos los dispositivos emiten luz infrarroja inocua dirigida al ojo, siendo su reflejo sobre el negro de la pupila lo que determina la dirección de la mirada.

Estos datos se usan para extrapolar la rotación del ojo y determinar la dirección de la mirada, el ritmo de pestañeo y el diámetro de la pupila, tomando en cuenta el movimiento y la posición de la cabeza.

El estudio preliminar consistió en presentar sobre un monitor de PC la versión clásica de la proposición I del Libro I de los Elementos de Euclides y su versión coloreada por Byrne. En ambos casos se cambió la distribución espacial de las demostraciones para permitir que los axiomas, definiciones y postulados referenciados estén disponibles en la pantalla y no sea necesario recurrir a otro contexto espacial fuera de los márgenes del monitor.

Se conformaron dos grupos integrados respectivamente por alumnos por un lado y docentes en cuya formación la matemática tuviera un rol destacado por el otro, con la intención de armar un test usual en esta tecnología de contraste entre novicios y expertos, debiendo en ambos casos hacer un relato verbal paso a paso de cada versión que observaban. El resultado numérico que brinda el sistema de *eyetracking* se transformó en un diagrama de círculos numerados por orden cronológico de visualización superpuestos a cada versión, variando su diámetro en función del tiempo de fijación y enlazados entre sí por un trazo que reforzaba su desarrollo en el tiempo.

Como era de esperarse, el grupo de novicios frente a la versión clásica constantemente movía sus ojos rápidamente entre cada porción de texto y su referencia en el diagrama, volviendo varias veces a repetir la secuencia desde el principio. El grupo de expertos buscaba en el desarrollo textual lo que se quería demostrar para luego hechar una mirada detenida sobre el diagrama y volvía al texto casi sin volver a recurrir al mismo.

Cuando ambos grupos se enfrentaron a la versión coloreada el comportamiento fue casi inverso, y sobre este punto hay que hacer una aclaración metodológica antes de sacar cualquier conclusión.

El grupo de novicios ya había tenido contacto con ambas versiones mientras que el de expertos no tuvo acceso a ninguna de las dos con anterioridad al experimento, aunque ya contaban con un conocimiento previo bajo la forma de una disposición natural frente al proceso de demostración geométrica contemporánea, no tan natural frente al estilo griego antiguo y ninguna frente a la versión de Byrne. Recordemos que al presentar una proposición, Euclides nos da una sentencia que describe lo que va a probar.

Luego hay una prueba que hace referencia a un diagrama en particular. Desde un punto de vista lógico, la sentencia general surge como parte esencial de la prueba, y el diagrama particular pasa entonces a ser decorativo. Sin embargo Euclides hace lo contrario. El diagrama particular es esencial para la prueba, y la sentencia general no tiene ningún rol.

A su vez se encontraron subgrupos de interesante análisis con vistas a trabajos futuros como por ejemplo, dentro de los expertos, a aquellos provenientes de carreras de ingeniería, que fijaron su atención en las imperfecciones de algunas construcciones, como las intersecciones difusas de líneas. Sin importar el grupo de pertenencia, se encontraron a su vez los que primero leen el texto frente a quienes primero se detienen en las imágenes. Todas estas variables experimentales no fueron tenidas en cuenta por su complejidad.

En relación a ambos grupos consideramos que las representaciones visuales ofician como anclaje del contenido conceptual, pero la figura ancla al contenido de una forma cualitativamente distinta a su representación algebraica. Para el caso de la proposición I del libro I de los elementos de Euclides toda la construcción puede hacerse mentalmente, pero el hecho de visualizar el trazado reduce las demandas del uso de la memoria a corto plazo, y permite acceder a relaciones lógicas más complejas.

Para los expertos con orientación ingenieril los diagramas de Euclides contienen una colección de magnitudes espacialmente relacionadas: largos, ángulos, áreas. Para cualquier par de magnitudes del mismo tipo, o una es mayor que la otra o son iguales. Estas relaciones componen lo que (Manders, 2008, p. 92) denomina las propiedades exactas del diagrama y es donde este grupo se encuentra en su medio. Pero a su vez, como esas magnitudes se relacionan en el espacio unas con otras comprenden las denominadas propiedades *coexactas* del diagrama, que fueron el motivo de las observaciones sobre desprolijidades en el dibujo. Por ejemplo el diagrama de un triángulo varía con respecto del largo de sus lados, sus ángulos y el área que encierra. Pero con respecto a sus propiedades *coexactas* los diagramas son iguales. Todos consisten de tres regiones limítrofes que juntas definen un área. Por lo tanto se puede considerar que los diagramas de Euclides contribuyen a las pruebas solo mediante sus propiedades *coexactas*. (Euclides nunca infringió una propiedad exacta a partir de un diagrama a menos que ésta se siguiera lógicamente de una propiedad *coexacta*, y esto es lo que permitió que los defectos de trazado no fueran tenidos en cuenta en la antigüedad)

### Conclusiones

Aunque las técnicas el seguimiento ocular resultan potencialmente una solución al difícil arte del diseño de materiales didácticos, los datos obtenidos mediante esta

técnica requieren de un grado importante de inferencias acerca de los procesos cognitivos subyacentes, pues los datos en crudo no explican porqué miramos ciertas áreas durante tanto tiempo y en cierto orden. Ni tampoco porqué omitimos otras zonas, y determinar en que proporción operan en un momento dado cargas cognitivas o emocionales. Para reducir la cantidad de suposiciones, los datos se deben usar como complemento de una descripción verbal retrospectiva o simultánea a la observación, y lo que es esencial: cualquier posible interpretación la debe brindar un grupo de expertos en los campos de la didáctica de la matemática, la psicología cognitiva, la estadística y la metodología del seguimiento ocular.

“Mientras que las imágenes de nuestras retinas forman parte de la causa de lo que vemos, otra parte muy importante de esa causa está constituida por el estado interno de nuestras mentes, el cual dependerá a su vez de nuestra cultura, nuestro conocimiento previo y de nuestras expectativas” (Chalmers, 1999, p. 8).

### Referencias bibliográficas:

- Byrne, O. (2010) *Los Elementos de Euclides*. Colonia: Taschen.
- Manders, K. (2008). *The Euclidean Diagram. En P. Mancosu. The Philosophy of Mathematical Practice*. (pp. 80- 132). New York: Oxford University Press.
- Chalmers, A. F. (2002). *¿Qué es esa cosa llamada ciencia?* Buenos Aires: Siglo Veintiuno de Argentina Editores.

---

**Abstract:** The combination of text and diagrams with which certain geometric demonstrations are exposed at the middle level of education often overload students' perceptual and cognitive resources. The ocular tracking technology helps to consider other representations that access the same mathematical object with greater efficiency without losing the logical rigor exclusive to the discipline.

**Keywords:** eye tracking - geometry

**Resumo:** A combinação de texto e diagramas com que se expõem certas demonstrações geométricas no nível médio de educação, sobrecargam em muitos casos os recursos perceptuais e cognitivos dos alunos. A tecnologia de rastreamento ocular ajuda a considerar outras representações que acedem ao mesmo objeto matemático com maior eficiência sem perder o rigor lógico excludente da disciplina.

**Palavras chave:** rastreamento ocular - geometria

(\*) **Claudio A. López.** Profesor en Enseñanza Secundaria de la Modalidad Técnico profesional. Docente de Matemática Aplicada en la Escuela Técnica 31 - CABA